PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

per Matematica Applicata e Informatica Multimediale

Prof. Stefano De Marchi

`Verona, 11 settembre 2007`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, `numero di matricola`. `Consegnare fogli leggibili!`. Inviare quindi una email a `stefano.demarchi@univr.it` contenente tutti i files e le figure prodotte in formato .jpg o .eps

1. Si consideri la matrice $A = \texttt{pentadiag}(-1, -1, \alpha, -1, -1) \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, $\alpha \in [0.5, 1.5]$ che possiamo decomporre in $A = M + D + N$ con $D = \texttt{diag}([\alpha - 1, ..., \alpha - 1])$, $M = \texttt{pentadiag}(-1, -1, 1, 0, 0)$ e $N = A - M - D$.

   (a) Per quale valore α^* il metodo iterativo $(M + N)x^{(k+1)} = -Dx^{(k)} + q$ risulta essere convergente più velocemente?

   (b) Sia poi `q=1:10`. Si calcoli la soluzione del sistema $A\,x = q$ a partire dalla soluzione $x^{(0)} =$`[ones(5,1);zeros(5,1)]` a meno di $tol = 1.e - 6$.

2. Si consideri il seguente integrale definito

$$\int_{-\pi}^{-\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx\,.$$

   (a) Dire "a priori", analizzando la formula dell'errore, quanti punti sono necessari per il calcolo del precedente integrale con il *metodo dei trapezi composito* a meno di $tol = 1.e - 3$.

   (b) Calcolare quindi l'integrale con il metodo di trapezi composito usando 20 punti equispaziati tra $-\pi$ e $-5/\pi$ e 50 punti equispaziati tra $-5/\pi$ e $-1/\pi$. Qual è l'errore assoluto commesso? Usare come valore esatto quello ottenuto con `quadl` con la stessa tolleranza.

3. Dati i punti

```
Px=[0 1/2 1 5/2 18/5 5 49/6];
Py=sin(log(Px+1));
```

   si costruisca, mediante l'algoritmo di De Casteljau (descritto in sezione 5.8.2), l'approssimante di Bézier di grado 6.

◊◊

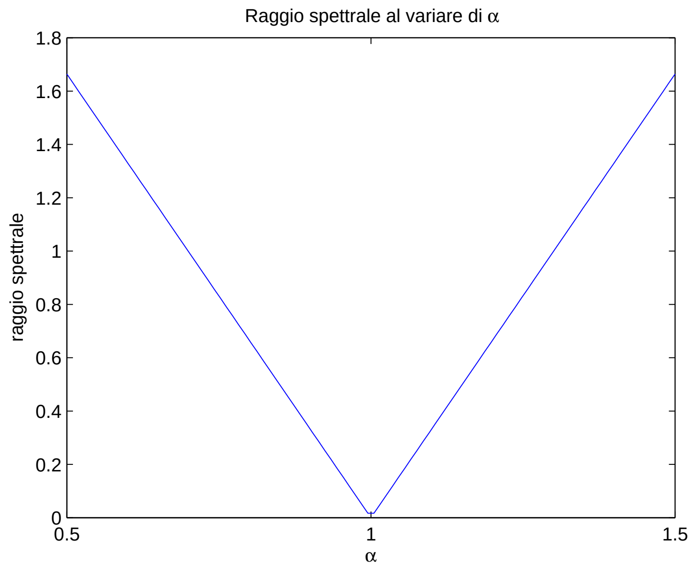
Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

Es. 1.
```
clear
%------------------------------
% Esercizio 1: 11 sett. 2007
%------------------------------

% parte (a) <---
b=ones(10,1);
c=-ones(9,1);
d=-ones(8,1);

alf=linspace(0.5,1.5,100) for i=1:length(alf)
% matrice pentadiagonale
A=alf(i)*diag(b)+diag(c,-1)+diag(c,1)+diag(d,-2)+diag(d,2);

% Ora A=D+M+N con D, M ed N cosi' definite:
D=diag((alf(i)-1)*ones(10,1)); M=diag(d,-2)+diag(c,-1)+diag(b);
N=A-D-M;

% Matrice d'iterazione
P=-inv(M+N)*D; rho(i)=max(abs(eig(P))); end

plot(alf,rho);

[minr,imin]=min(rho); alfstar=alf(imin);

% parte (b)   <---
% costruiamo nuovamente la matrice pentadiagonale A e la sua
% scomposizione in corrispondenza al valore alfa*
A=alfstar*diag(b)+diag(c,-1)+diag(c,1)+diag(d,-2)+diag(d,2);
D=diag((alfstar-1)*ones(10,1)); M=diag(d,-2)+diag(c,-1)+diag(b);
N=A-D-M;

% Matrice d'iterazione corrispondente
P=-inv(M+N)*D;
% Termine noto q =[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
q=[1:10]';

% Calcoliamo la soluzione con il metodo iterativo
```

```
% con le scelte kmax=100, tol=1.e-6 e x0=[ones(5,1);zeros(5,1)];

kmax=100;
tol=1.e-6;
x0=[ones(5,1);zeros(5,1)];
x1=P*x0+inv(M+N)*q;
k=1; while norm(x1-x0,inf) > tol & k<=kmax
    x0=x1;
    x1=P*x0+inv(M+N)*q;
    k=k+1;
end
k-1
x1

% Esecuzione .......

minr =

    0.0168


imin =

    50


ans =

     4

% Soluzione

x1 =

   -7.4977
   -5.6434
   -2.8164
    2.6991
    4.6398
    2.5055
```

```
-2.7719
-8.0743
-8.8289
-6.9382
```



Es. 2.
```
clear;
%------------------------------
% Esercizio 2: 11 settembre 2007
%------------------------------

tol=1.e-3;

% Determino quanti punti sono necessari per calcolare l'integrale
% int_{-pi}^{1/pi}^ sin(1/x^2) dx a meno della tolleranza richiesta
% con il metodo dei trapezi composito

a=-pi; b=-1/pi;

x=linspace(a,b,2000); [f,f2]=funQ(x); f2max=max(abs(f2));

%  Parte (a)
% Con i trapezi compositi
disp('Numero dei punti richiesti dai trapezi')
Ntrap=floor(sqrt((b-a)^3*f2max/(12*tol)))


% Parte (b)
realValue=quadl(@funQ,a,b,1.e-3)

n1=20; x1=linspace(-pi,-5/pi,n1); fx1=funQ(x1); h1=(pi-5/pi)/(n1-1);
V1=h1/2*(fx1(1)+fx1(end)+2*sum(fx1(2:end-1)));

n2=50; x2=linspace(-5/pi,-1/pi,n2); fx2=funQ(x2);
h2=(5/pi-1/pi)/(n2-1);
V2=h2/2*(fx2(1)+fx2(end)+2*sum(fx2(2:end-1)));

ValTrap=V1+V2

err=abs(realValue-ValTrap)


function [f,f2]=funQ(x)

% Questa funzione calcola la funzione integranda e la sua derivata seconda
f=sin(1./x.^2); % funzione
```

```
fc=cos(1./x.^2);

f2=-f.*4./(x.^6)+(6./(x.^4)).*fc; % derivata seconda.

return
```

Eseguendo il precedente codice si ottengo i seguenti risultati

```
Numero dei punti richiesti dai trapezi

Ntrap =

        2052


realValue =

    0.9502


ValTrap =

    0.9470


err =

    0.0031
```

Es. 3
```
clear;
%--------------------------------
% Esercizio 3: 11 settembre 2007
%--------------------------------

Px=[0 1/2 1 5/2 18/5 5 49/6];
Py=sin(log(Px+1));
plot(Px,Py,'or')

b=[Px; Py]; n=length(Px);

t=linspace(0,1,100);
for k=1:length(t)
for r=2:n,
    for i=1:n-r+1,
        b(:,i)=(1-t(k))*b(:,i)+t(k)*b(:,i+1);
    end
end
bb(:,k)=b(:,1);
end

plot(Px,Py,'o-', bb(1,:),bb(2,:),'.-')
```