PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

per Matematica Applicata e Informatica Multimediale

Prof. Stefano De Marchi

`Verona, 20 dicembre 2007`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, `numero di matricola`. `Consegnare fogli leggibili!`. Inviare quindi una email a `stefano.demarchi@univr.it` contenente tutti i files e le figure prodotte in formato .jpg o .eps

1. Si consideri la matrice, che dipende da un paramatro t,

   `A=[1 0 t 1+t; 0 -1 -t 0; 1+t 0 1 t; 0 -t 0 1];.`

   (a) Individuare un intervallo di valori t nei quali la matrice d'iterazione di Jacobi, J, risulta convergente.

   (b) Si consideri poi il sistema $Ax = b$, con b scelto cosicché `x=ones(4,1)`. Visualizzare su un grafico il numero d'iterazioni richieste per risolvere il sistema in corrispondenza ai valori di t in cui c'è convergenza. Usare `x0=zeros(4,1)`, `tol=1.e-6`. (*Sugg.*: usare il comando Matlab `find` per individuare i valori di t in cui c'è convergenza).

   (c) Dedurre quindi che il metodo di Jacobi converge più velocemente per $t \approx 0$.

2. Si considerino 20 punti di Chebyshev-Lobatto (in [-1,1] sono i punti $x_k = \cos(k\pi/n)$) tra $[1, 4]$, che memorizziamo nell'array `X`, nonché i valori `Y` = `log(X`^{3}`)/exp(X)`. Mediante il metodo composito dei trapezi si integri l'insieme discreto `X,Y`.

   (i) Qual è l'errore commesso rispetto all'integrale calcolato con la funzione `quadl` a meno di $tol = 1.e-4$?

   (ii) Quanti punti equispaziati servirebbero per avere un errore a meno di tol con i trapezi compositi?

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Dire per quali valori di α risulta essere definita positiva.

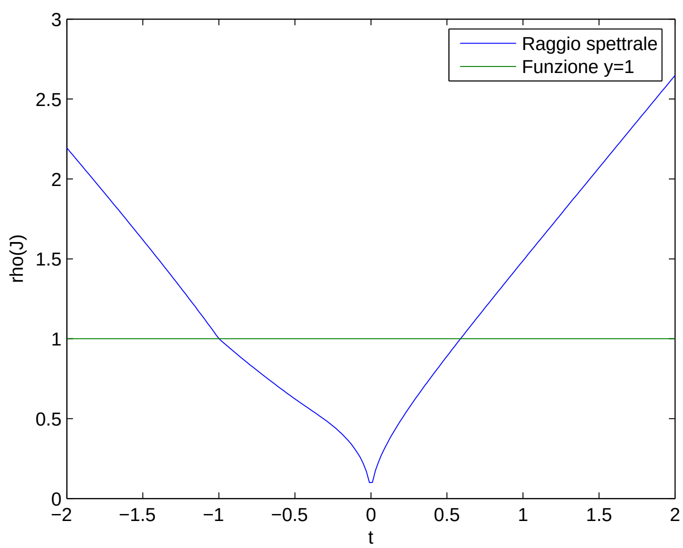
◊◊

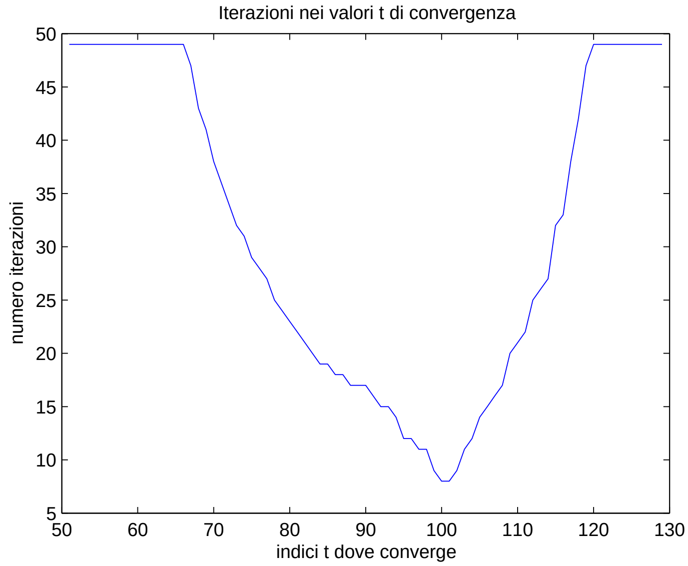
Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

Es. 1.
```
%----------------------------
% Esercizio 1 del 20/12/07
%----------------------------
clear all

% parte (a)
s=linspace(-2,2,200); % prendo 200 valori di s in [-2,2]
for i=1:length(s),
 t=s(i);
 % matrice A
 A=[1 0 t 1+t;
     0 -1 -t 0;
     1+t 0 1 t;
     0 -t 0 1];
 D=diag(diag(A));
 J=-inv(D)*(A-D);           %matrice di Jacobi
 rhoJ(i)=max(abs(eig(J)));
end
plot(s,rhoJ,s,ones(1,length(s)));

legend('Raggio spettrale', 'Funzione y=1');

xlabel('t'); ylabel('rho(J)');

k=find(rhoJ <1); % determina gl'indici dove i raggi spettrali sono minori di 1

%parte (b)

itermax=50; tol=1.e-6;

for j=k(1):k(end),
    x0=zeros(4,1);
    t=s(j);
    A=[1 0 t 1+t;
     0 -1 -t 0;
     1+t 0 1 t;
     0 -t 0 1];
     D=diag(diag(A));
```

```
    J=-inv(D)*(A-D); % matrice d'iterazione di Jacobi
    q=inv(D)*(A*ones(4,1)); % termine noto
    x1=J*x0+q;
    iter=1;
    while norm(x1-x0)> tol*norm(x1) & iter < itermax
        x0=x1;
        x1=J*x0+q;
        iter=iter+1;
    end
    niter(j-k(1)+1)=iter-1;
end
figure
plot(k,niter);

xlabel('indici t dove converge'),ylabel('numero iterazioni');
title('Iterazioni nei valori t di convergenza');

% parte (c)
[m,mi]=min(niter);

disp('il valore di t per cui il metodo converge piu'' velocemente
e'' '); t=s(mi+k(1))
```

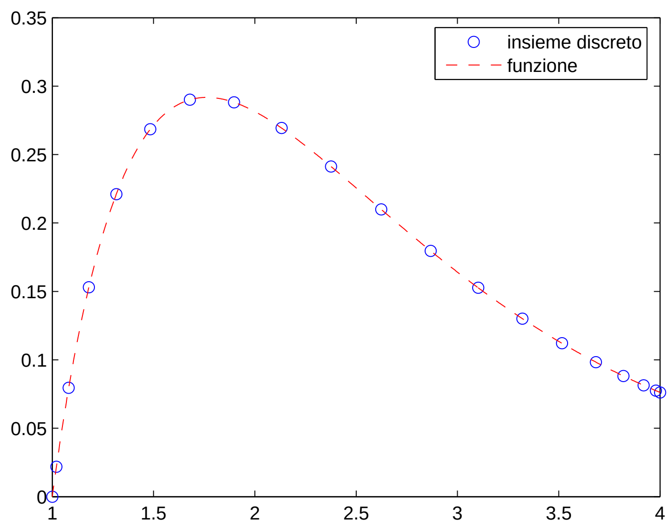





```
>> Esercizio1
il valore di t per cui il metodo converge piu' velocemente e'

ans =

    0.0101
```

Es. 2.
```
clear
%-------------------------
% Esercizio 2 del 20/12/07
%-------------------------

a=1; b=4; m=20;
x=(b+a)/2-(b-a)/2*cos([0:m-1]*pi/(m-1)); %punti di Chebyshev-Lobatto in [a,b]
y=fun2(x); plot(x,y,'o')
hold on
%parte (i)
Trap=sum(diff(x).*(y(1:end-1)+y(2:end))/2)

f=@(x)(log(x.^3)./exp(x));

tol=1.e-4;
err=abs(Trap - quadl(f,a,b,tol))
```

```
% parte (ii)
x1=linspace(a,b,1000);
[y,y2]=fun2(x1);

plot(x1,y,'--r')
legend('insieme discreto', 'funzione')
M2=max(abs(y2));
% Con i trapezi compositi
disp('Numero dei punti equispaziati richiesti dai trapezi
compositi')
Ntrap=floor(sqrt((b-a)^3*M2/(12*tol)))

hold off

function [y,y2]=fun2(x)
ex=exp(x);
lg=log(x.^3);
y=lg./ex;
y2=-3./(x.^2.*ex)-6./(x.*ex)+y;
return
```




```
>> Esercizio2
```

```
Trap =

    0.5686
err =

    0.0021
Numero dei punti equispaziati richiesti dai trapezi composito

Ntrap =

   272
```

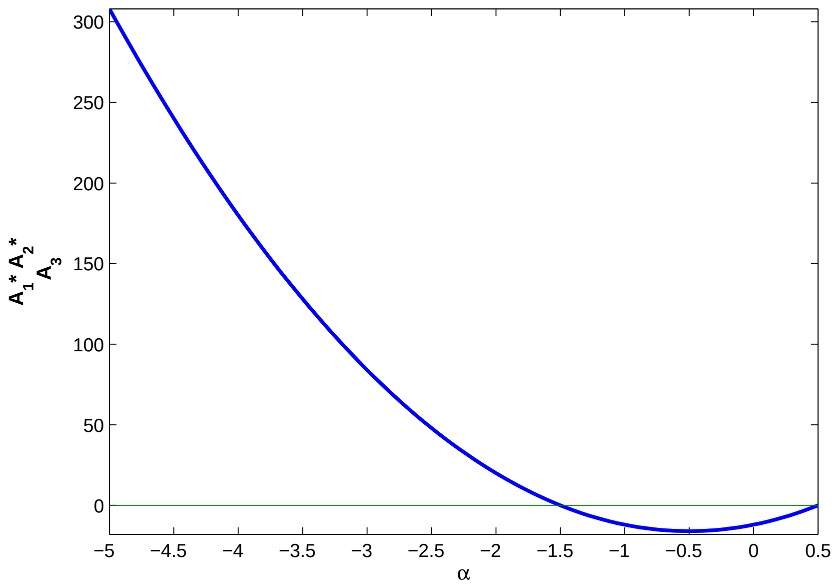
1. Osservo che

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

è simmetrica. Per provare se è anche definita positiva verifico se i tutti i suoi minori principali di testa sono positivi. Si ha $A_1 = 2 > 0$, $A_2 = 2(1-\alpha)-1 > 0 \iff \alpha < \frac{1}{2}$ e infine $A_3 = \mathtt{det}(A) = 4(1-\alpha)-10 > 0 \iff \alpha < -3/2$. Riassumendo, se $\alpha < -\frac{3}{2}$ al matrice è definita positiva.

Il codice seguente ci fa vedere come varia il prodotto $\prod_{i=1}^{n} A_i$ al variare di α.

```
clear
%-------------------------
% Esercizio 3 del 20/12/07
%-------------------------

alfa=linspace(1/2,-5,100);
for k=1:length(alfa)
 A=[2 1 0; 1 1-alfa(k) -2; 0 -2 2];
 AA(1)=det(A(1,1));
 AA(2)=det(A(1:2,1:2));
 AA(3)=det(A);
     detAA(k)=AA(1)*AA(2)*AA(3);
end

plot(alfa,detAA,alfa,zeros(1,length(alfa)))

axis([-5 1/2 min(detAA)-2 max(detAA)])
```


300
250
200
150
100
50
0
−5
−4.5
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
α