PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

per Matematica Applicata e Informatica Multimediale

Prof. Stefano De Marchi

`Verona, 25 settembre 2007`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, `numero di matricola`. `Consegnare fogli leggibili!`. Inviare quindi una email a `stefano.demarchi@univr.it` contenente tutti i files e le figure prodotte in formato .jpg o .eps

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x + 2} \log(\alpha x), \quad \alpha \neq 0\,,$$

   (a) Dire quali sono gli zeri di $f(x)$ risolvendo analiticamente $f(x) = 0$.

   (b) Sia ora $\alpha = 2$. Si calcoli lo zero $x^* = 1/\alpha$ mediante il metodo di Newton a meno di $tol = 1.e - 6$.

2. Dati i vettori `d=5*ones(1,5); b=-2*ones(1,4);` si costruisca la matrice tridiagonale simmetrica A di ordine 5, la cui diagonale principale è `d` e quelle superiori e inferiori sono `b`. Si determinino tutti i suoi autovalori.

3. Si considerino i valori $\mathtt{X} = \mathtt{2:20}, \mathtt{Y} = \sin(\mathtt{x}^2/(\mathtt{25}+\mathtt{x}))$. Mediante il metodo composito dei trapezi si integri l'insieme discreto `X,Y`. Qual è l'errore commesso rispetto all'integrale calcolato con la funzione `quadl` a meno di $tol = 1.e - 3$? Quanti punti servirebbero per avere un errore a meno di tol con i trapezi compositi?

◊◊

Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

Es. 1. (a) Anzitutto la funzione è definita per $x \neq -2/\alpha$, quindi il suo campo di esistenza è $\mathbb{R} \setminus \{-2/\alpha\}$. Gli zeri si ottengono risolvendo le due equazioni

$$\begin{aligned} \sin(\alpha x) &= 0 \\ \log(\alpha x) &= 0\,. \end{aligned}$$

che hanno soluzioni $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ e $x = \pm 1/\alpha$.

(b) Quando $\alpha = 2$, lo zero richiesto è $x^* = 1/2$. Usando il metodo di Newton, sapendo che $f'(x) = \dfrac{\sin(\alpha x)}{x(\alpha x+2)} + \alpha \left[\dfrac{\cos(\alpha x)(\alpha x+2) - \sin(\alpha x)}{(\alpha x+2)^2}\right]$, con il codice seguente

```
clear;
%-------------------------
% Esercizio 1 del 25/9/07
%-------------------------
% parte (a)
a=2;
 x=linspace(1/(2*a),3/(2*a),1000);
 y=fun1(x,a);
 plot(x,y)
 grid

% parte (b)

 kmax=100; tol=1.e-6;
 x0=3/(2*a);
 iter(1)=x0;
 [y,yd]=fun1(x0,a);
 x1=x0-y/yd;
 k=1;
 iter(k+1)=x1;

while abs(x1-x0)> tol*abs(x1) & k <=kmax
    x0=x1;
    [y,yd]=fun1(x0,a);
    x1=x0-y/yd;
    iter(k+1)=x1;
```

```
    k=k+1;
end

x1
%----------------

function [y,yd]=fun1(x,a)
Ax=a*x+2; Sx=sin(a*x);
y=Sx./Ax.*log(a*x);
yd=Sx./(Ax.*x)+a*(cos(a*x).*Ax-Sx)./(Ax.^2);
return
```

in 12 iterazioni si calcola la soluzione richiesta.

Es. 2. Si tratta del classico problema a cui applicare il metodo di Givens delle successioni di Sturm. Il codice seguente, fa uso della funzione `metGivensSuccSturm(d,b,ind,tol)` che calcola l'intervallo $[\alpha, \beta]$ in cui cade l'autovalore *ind*-esimo. La funzione richiede poi, come inputs, i vettori `d, b` che servono a definire la matrice tridiagonale. La funzione all'interno chiama un'altra funzione `[p,s]=succSturm(d,b,x)` che calcola la successione di Sturm `p` in `x` e i corrispondenti cambiamenti di segno `cs` a partire dai vettori `d` e `b`. Queste due funzioni sono descritte nelle dispense relative al corso.

```
clear
%-------------------------
% Esercizio 2 del 25/9/07
%-------------------------
d=5*ones(1,5); b=-2*ones(1,4);

A=diag(d)+diag(b,-1)+diag(b,1);

tol=1.e-6

% Calcolo gli autovalori
for ind=1:5
  [aa,bb,c(ind)]=metGivensSuccSturm(d,b,ind,tol);
end

% Stampo gli autorvalori
c
```

Es. 3
```
clear
%------------------------
% Esercizio 3 del 25/9/07
%------------------------

x=2:20;
y=fun3(x);
plot(x,y,'o-')

% Formula composita dei trapezi

Trap=sum(diff(x).*(y(1:end-1)+y(2:end))/2)

f=@(x)(sin(x.^2./(25+x)));
tol=1.e-3;

% errore
err=abs(Trap - quadl(f,1,20,tol))

x=linspace(2,20,1000);
[y,y2]=fun3(x);
M2=max(abs(y2));
% Con i trapezi compositi stimiamo "a priori" quanti punti
% dovremmo usare per approssimare l'integrale a meno di 1.0e-3.
disp('Numero dei punti richiesti dai trapezi')
Ntrap=floor(sqrt((20-2)^3*M2/(12*tol)))

%---------------------------------
function [y,y2]=fun3(x)

y=sin(x.^2./(25+x));
y2=-y.*((x.^2+50*x)/((x+25).^2)).^2+cos(x.^2./(25+x)).*((2*(x+25)-4)./(x+25).^2);
return
```