PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO
per Matematica Applicata e Informatica Multimediale
Prof. Stefano De Marchi
`Verona, 29 marzo 2007`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. **Consegnare fogli leggibili!**. Inviare una email a `stefano.demarchi@univr.it` contenente tutti i files e le figure prodotte. **NOTA: allegate immagini in formato .jpg o .eps**

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = 1.74\,\log(10\,\sqrt{x}) - \frac{4}{10} - \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

   - Trovare l'intervallo $[a, b]$ che contiene l'unica radice α di $f(x)$.
   - Costruire un metodo d'iterazione funzionale convergente in $[a, b]$ alla radice α. Usare $tol = 1.e-6$.

2. Data la matrice `A=pascal(5)` di ordine $n = 5$,

   (a) Determinare $M = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\},\ \ m = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}$. Usare $tol = 1.e-6$.

   (b) Studiare il metodo iterativo dipendente dal parametro reale $\theta \in [0, 1/2]$

$$x^{(k+1)} = (I - \theta A)x^{(k)} + \theta\, b\ ,\quad k \geqslant 0\,. \tag{1}$$

   Si chiede di verificare graficamente per quali valori di θ il metodo converge.

   (c) Sia $\theta^* = \min\{0 \leqslant \theta \leqslant 1/2\}$ per cui il metodo iterativo converge. Siano $b \in \mathbb{R}^n$ tale che `x=ones(n,1)` e `x0=zeros(n,1)`. Risolvere quindi il sistema $Ax = b$ con il metodo iterativo (1).

3. L'integrale di $f(x) = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos(x)$ su $[-1, 1]$ si può approssimare con la formula di Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(z_i)\ . \tag{2}$$

   Il vettore dei nodi $\mathbf{z}$ e dei pesi $\mathbf{w}$ si possono determinare con la M-function:

```
 function [z,w]=zwlegendre(n)
% This function computes nodes z and weights
% w of the Gauss-Legendre quadrature formula.
%---------------------------------------------
% Input:
%      n = number of quadrature nodes
%Outputs:
%      z = column vector of the nodes
%      w = column vector of the weights
%---------------------------------------------
if n<=1
    z=[0]; w=[2];
    return
end
A=zeros(n);k=[1:n-1]; v=k./(sqrt(4*(k.^2)-1));
A=A+diag(v,1)+diag(v,-1); [w,z]=eig(A); nm2=sqrt(diag(w'*w));
w=(2*w(1,:)'.^2)./nm2; z=diag(z);
```

Si chiede di calcolare l'integrale (2) con la formula di Gauss-Legendre costruita prendendo $n = 2^i$, $i = 0, 1, ..., imax = 8$ punti a meno di $tol = 1.e - 9$. In pratica ci si arresterà quando $n > 2^8$ oppure l'errore in modulo diventa minore di tol, assumendo come valore esatto quello che si ottiene con la funzione `quadl`).

Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

Es. 1. La funzione è definita per $x > 0$ e $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ed è strettamente crescente. Plottandola usando, ad esempio, il comando

```
ezplot('1.74*log(10*sqrt(x))-0.4-1/sqrt(x)',[0.1 1]);,
```

si vede che essa ha un' unico zero in [0.1,0.3] (vedi Fig. 1 sx).

Dalla relazione $1.74\,\log(10\,\sqrt{x}) - 0.4 = x^{-1/2}$ moltiplicando a sx e dx per $x^{1/2}$ possiamo ricavare lo schema iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i) := \frac{\sqrt{x_i}}{1.74\log(10\sqrt{x_i}) - 0.4}\,. \tag{3}$$

La derivata della funzione d'iterazione è

$$g'(x) = \frac{1/2x^{-1/2}\,(1.74\log(10\sqrt{x}) - 2.14)}{(1.74\log(10\sqrt{x}) - 0.4)^2}$$

che, come si vede in Fig. 1 dx, è in modulo minore di 1 su tutto l'intervallo d'interesse.

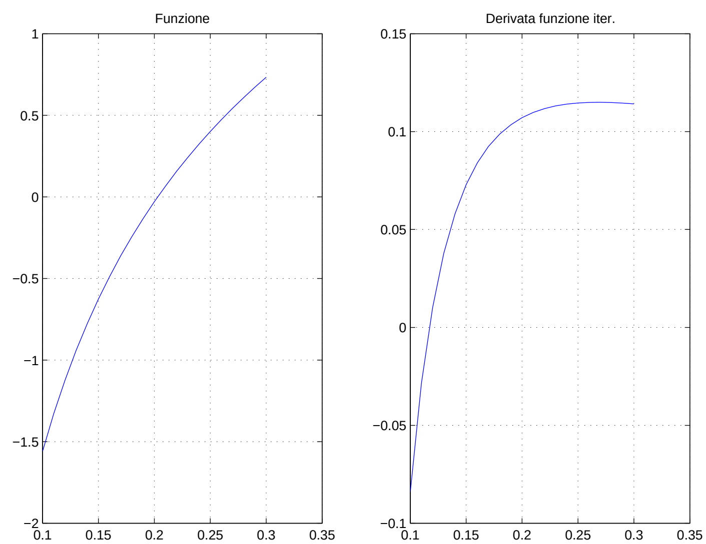

Figure 1: Grafico della funzione $f(x)$ e della derivata della funzione d'iterazione $g(x)$ in [0.1,0.3]

Implementando l'iterazione (3) con il codice seguente

```
clear
%----------------------------------------
% Esame 29 marzo 2007, esercizio 1
%----------------------------------------
tol=1.e-6;

x=0.1:0.01:0.3;

[y,yi,yid]=funzero(x);

subplot(1,2,1); plot(x,y); grid; title('Funzione'); subplot(1,2,2);
plot(x,yid); grid; title('Derivata funzione iter.');

x0=input('valore iniziale = ');
[y,xnew,xx]=funzero(x0); kmax=100;
k=1;

while (abs(xnew-x0)>tol*abs(xnew) & k<=kmax)
 x0=xnew;
 [y,xnew,xx]=funzero(x0);
 k=k+1;
end
k=k-1
xnew disp('Valore calcolato con fzero')

z=fzero(@(x) funzero(x),0.5,tol)
```

dove `funzero` è la funzione che consente di calcolare $f(x), g(x)$ e $g'(x)$

```
function [y,yi,yid]=funzero(x)
% Valuta la funzione f, che dipende da C, in x
% che lo restituisce in y.
%
% Calcola la funzione d'iterazione in x restituendo yi
% e la sua derivata in yid.
%-----------------------------------------------------
sr=sqrt(x);
pl=1.74*log(10*sr);
y=pl-0.4-1./sr;
yi=sr./(pl-0.4);
srm1=0.5./sr;
yid=srm1.*(pl-2.14)./((pl-0.4).^2);
```

Eseguendo il codice si calcola la radice in 6 iterazioni:

```
>> esame29marzo2007esI
valore iniziale = .3

k =

     6


xnew =

    0.2030

Valore calcolato con fzero

z =

    0.2030
```

Es. 2. La matrice di Pascal è simmetrica e definita positiva, quindi ha autovalori positivi. Usando il metodo delle potenze (il codice Matlab lo abbiamo descritto nelle esercitazioni) possiamo calcolare $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\lambda_i\}$ e mediante il metodo delle potenze inverse (per il codice vale lo stesso discorso che per il metodo delle potenze) $m = \min_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\lambda_i\}$.

Consideriamo ora il metodo iterativo (1) che ha matrice d'iterazione $P = I - \theta A, \quad \theta \in [0, 1/2]$. Come si evince subito, gli autovalori μ_i di P, che dipendono da θ, sono tali che $\mu_i(\theta) = 1 - \theta\lambda_i$, con λ_i autovalore di A. Pertanto essa ha raggio spettrale

$$\rho_\theta(P) = \max\{|1 - \theta\, m|, |1 - \theta\, M|\}\,.$$

Si osserva che

$$\rho_\theta(P) < 1 \iff 0 < \theta < 2/M\,.$$

In corrispondenza del minimo del raggio spettrale troveremo il valore di θ^*.

Come si vedrà eseguendo i calcoli, la matrice P ha il raggio spettrale il cui minimo è $0.998 \approx 2/M$ che è quasi 1. Infatti, la matrice di Pascal è in generale malcondizionata (nel nostro caso `cond(A)`≈ 8520) e quindi i metodi risolutivi di sistemi con tali matrici non saranno molto efficienti e anche poco stabili.

Facciamo poi un'ultima osservazione: il metodo (1) è un metodo iterativo per risolvere il sistema $Ax = b$. Infatti, da $\theta Ax = \theta b$, cambiando di segno e sommando a sx e dx Ix si ottiene proprio il sistema (1).

Il codice seguente permette di fare tutto quanto richiesto dal problema.

```
clear
%------------------------------------------------
% Esame 29 marzo 2007, esercizio 2
%------------------------------------------------
tol=1.e-6; n=5; kmax=1000;
A=pascal(n);
[AMax,xM]=metPotenze(A,tol,kmax);
[Amin,xm]=metPotenzeInv(A,tol,kmax);
disp('autovalore max di A =' );
AMax
disp('autovalore min di A =' );
Amin
k=0;

for t=0.:0.001:0.5
  k=k+1;
  rho(k)=max([abs(1-t*Amin),abs(1-t*AMax)]);
  tt(k)=t;
end
plot(tt,rho); grid
% --- Determiniamo in corrispondenza a quale
% valore di theta (tt) si a il valore minimo di rho

[m,im]=min(rho); tts=tt(im);
%------ Risolvo il sistema lineare

x0=zeros(n,1);
b=A*ones(n,1);
P=eye(n)-tts*A;
k=1; b1=tts*b;
x1=P*x0+b1;

while(abs(x1-x0)>tol*abs(x1) & k<=kmax)
    x0=x1;
    x1=P*x0+b1;
    k=k+1;
```

```
end

sol=x1 iter=k-1
```

Eseguendolo, questi sono i risultati

```
>> esame29marzo2007esII
autovalore max di A =

AMax =

   92.2904

autovalore min di A =

Amin =

    0.0108


sol =

    0.9614
    1.0238
    1.0135
    0.9807
    1.0056


iter =

   191
```

Es. 3. Data la funzione Matlab `zwlegendre`, si tratta semplicemente di calcolare l'integrale usando come numero di punti $n = 2^i,\ i = 1, \ldots, 8$. Il codice seguente fa quanto richiesto.

```
clear; a=-1; b=1; imax=8; i=0; tol=1.e-9; err=tol+1;
vint=quadl(@fun,a,b,tol);
```

```
while(i<=imax & err> tol)
   n=2^i;
   [z,w]=zwlegendre(n);
   vi=w'*fun(z);    %formula di quadratura
   err=abs(vi-vint);
   i=i+1;
end
tes1=['Valore calcolato = ', num2str(vi)];
disp(tes1);
tes2=['Usando 2^', num2str(i-1), ' punti'];
disp(tes2);
tes3=['Valore vero usando quadl = ', num2str(vint)];
disp(tes3);

%--------------------------------
function y=fun(x),
y=x/2.*exp(-x/2).*cos(x);
```

Eseguendolo questi sono i risultati

```
>> esame29marzo2007esIII
Valore calcolato = -0.12236

Usando 2^3 punti

Valore vero usando quadl = -0.12236
```