LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Integrazione composita e gaussiana

Università di Verona

Prof. S. De Marchi

Verona, 14 marzo 2008

1 Integrazione numerica

Per il calcolo approssimato di integrali definiti, abbiamo visto due metodi importanti: la *formula dei trapezi* e il *metodo di Simpson.* Per entrambi i metodi, che sono di tipo *interpolatorio*, si sono viste sia la forma *semplice* che quella *composita.* Se indichiamo con $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, detti metodi si descrivono con le formule seguenti.

- `Formula dei trapezi semplice ed relativo errore.`

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\ ,$$

$$I(f) - I_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\ ,\ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula dei trapezi composita e relativo errore.` Qui dobbiamo prendere una suddivisione equispaziata di $[a,b]$ del tipo $\{x_0 = a, \ldots, x_i = a+ih, \ldots, x_n = b\}$, con $h = (b-a)/n$:

$$I_T^c(f) = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\ ,$$

$$I(f) - I_T^c(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)\ ,\ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula di Simpson semplice e relativo errore.`

$$I_S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\ ,$$

$$I(f) - I_S(f) = -\frac{1}{16}\frac{(b-a)^5}{180}f^{(4)}(\xi),\ \ \xi \in (a,b)\ .$$

- `Formula di Simpson composita e relativo errore.` Qui dobbiamo prendere, come nel caso dei trapezi, una suddivisione equispaziata di $[a,b]$. Quindi nel generico intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, si considerano come punti di interpolazione x_{k-1},$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ e x_k. Posto $h = (b-a)/n$:

$$I_S^c(f) = \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{k-1}) + f(\bar{x}_k) + f(x_k)\right]\ ,$$

$$I(f) - I_S^c(f) = -\left(\frac{b-a}{180}\right)\frac{h^4}{16}f^{(4)}(\xi),\ \ \xi \in (a,b)\ .$$

Esercizio 1. Si calcoli numericamente

$$\int_0^{2\pi} x\mathrm{e}^{-x}\cos 2x dx = \frac{3(\mathrm{e}^{-2\pi}-1)-10\pi\mathrm{e}^{-2\pi}}{25} \approx -0.12212260462\ ,$$

mediante le tre formule *composite* dei trapezi, di Simpson, determinando *a priori* il numero di punti necessari in entrambi i casi. Si determini anche l'errore assoluto rispetto al valore esatto.

1.1 Formule gaussiane

- `Formula di Gauss composita e relativo errore.`

  Per ottenere risultati più accurati, abbiamo visto che si possono usare **formule di quadratura di tipo gaussiano**.

  Per costruire queste formule operiamo come segue. Partendo da una suddivisione equispaziata consideriamo, invece dei punti x_{k-1} e x_k, i punti

  $$y_{k-1} = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ,\quad y_k = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ .$$

  La formula di quadratura di Gauss composita si esprime allora come segue.

  $$I_G^c(f) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(f(y_{k-1}) + f(y_k)\right)\ ,$$

  $$I(f) - I_G^c(f) = \frac{b-a}{4320}h^4 f^{(4)}(\xi)\ ,\ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula di Gauss-Legendre` La formula di quadratura di *Gauss-Legendre* si può esprimere

  $$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(z_i)\ . \tag{1}$$

  ove, il vettore dei nodi **z** e dei pesi **w** si possono determinare con la M-function:

```
 function [z,w]=zwlegendre(n)
% This function computes nodes z and weights
% w of the Gauss-Legendre quadrature formula.
%---------------------------------------------
% Input:
%      n = number of quadrature nodes
%Outputs:
%      z = column vector of the nodes
%      w = column vector of the weights
%---------------------------------------------
if n<=1
    z=[0]; w=[2];
```

```
    return
end
A=zeros(n);k=[1:n-1];
v=k./(sqrt(4*(k.^2)-1));
A=A+diag(v,1)+diag(v,-1);
[w,z]=eig(A);
nm2=sqrt(diag(w'*w));
w=(2*w(1,:)'.^2)./nm2;
z=diag(z);
```

Esercizio 2 Calcolare l'integrale di $f(x) = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos(x)$ su $[-1, 1]$ a meno di `tol` $= 1.e - 9$ mediante le formule di Gauss composite.

Si chiede inoltre di calcolare l'integrale (1) con la formula di Gauss-Legendre costruita prendendo $n = 2^i,\ i = 0, 1, \ldots, imax = 8$ punti a meno di `tol` $= 1.e - 9$ (ci si arresterà quando $n > 2^8$ oppure l'errore in modulo diventa minore di *tol*, assumendo come valore esatto quello che si ottiene con la funzione `quadl`).

1.2 Quadratura con il metodo di Romberg

Il metodo di Romberg per la quadratura si applica usando la seguente *ricetta*: si costruisce una tabella, **T** triangolare (inferiore), la cui prima colonna consiste dei valori approssimati dell'integrale mediante la formula trapezoidale costruita usando suddivisioni regolari con $N = 2^m,\ m = 0, 1, 2, ...$ punti.

Se indichiamo con $T_{i,1}$ il generico elemento della prima colonna di **T**, che contiene il valore dell'integrale calcolato con la formula trapezoidale con passi) $h_i = 1, 2, 2^2, 2^3, ...$, gli elementi delle successive colonne sono costruiti mediante la ricorrenza

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left(\frac{h_{i-k}}{h_i}\right)^2 - 1}\ ,\quad k \geq 2. \tag{2}$$

Esercizio 3. Ricordando che ciascuna formula $T_{1,k}, T_{2,k}, T_{3,k}, ...$ è una formula di grado di esattezza $2k - 1$, calcolare l'integrale di $f(x) = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos(x)$ su $[-1, 1]$ per $k = 3$.
Tempo massimo: 2 ore.