Esercitazioni di Laboratorio di Calcolo Numerico

Stefano De Marchi*

Verona, December 5, 2006

1 Esercizi vari di algebra lineare numerica

1. I metodi iterativi, per la soluzione di un sistema lineare $Ax = b$, teoricamente richiedono un numero infinito di iterazioni. Nella pratica ciò non è ragionevole poiché invece che x ci si accontenta di una sua approssimazione $\tilde{x}$ o più concretamente di x^k, l'iterata ad un certo passo k del metodo, per la quale l'*errore* sia inferiore ad una prescelta tolleranza ϵ. Ma l'errore è a sua volta una quantità incognita perchè dipende dalla soluzione *esatta*. Nella pratica ci si rifà a degli stimatori dell'errore *a posteriori*.

   (a) Un primo stimatore è il **residuo** ad ogni iterazione

   $$r^k = b - Ax^k\,.$$

   In tal caso ci arresteremo in corrispondenza a quel k_{min} tale che

   $$\|r^{k_{min}}\| \le \epsilon \|b\|\,.$$

   Quindi, l'errore relativo

   $$\frac{\|x - x^{k_{min}}\|}{\|x\|} = \frac{\|e^{k_{min}}\|}{\|x\|} \le \epsilon \kappa(A)\,.$$

   Perció, il controllo sul residuo ha senso solo se $\kappa(A)$, il numero di condizionamento della matrice A, è ragionevolmente piccolo.

*Dipartimento di Informatica, Università di Verona

(b) Alternativamente si può calcolare il cosidetto *incremento* $\delta^k = x^{k+1} - x^k$. In tal caso il metodo si arresterà al passo k_{min} per cui

$$\|\delta^{k_{min}}\| \le \epsilon \|b\|\,.$$

Nel caso in cui la matrice di iterazione P (non la matrice del sistema!) è simmetrica e definita positiva, si otterrà

$$\|e^k\| = \|e^{k+1} - \delta^k\| \le \rho(P)\|e^k\| + \|\delta^k\|\,.$$

Per la convergenza, $\rho(P) < 1$, avremo alla fine

$$\|e^k\| \le \frac{1}{1-\rho(P)}\|\delta^k\|\,. \tag{1}$$

Nota: anche se P non è simmetrica e definita positiva si arriva alla stessa conclusione ma non vale la (1). In conclusione: il controllo sull'incremento ha senso solo se $\rho(P) \ll 1$.

Come applicazione di quanto prima detto al punto (b), sia `A` 50×50 tridiagonale con elementi sulla diagonale pari a 2.001 e quelli extradiagonali uguali a 1. Al solito `b` tale che `x=ones(50,1)`. Essendo `A` diagonalmente dominante in senso stretto, il metodo di G-S avrà velocità di convergenza doppia di quello di Jacobi. Usando come criterio di arresto il test sull'incremento, si determini la soluzione di detto sistema usando `x0=zeros(50,1)` e `tol=1.e-5`. In quante iterazioni il metodo di G-S converge? Qual è l'errore commesso ? Si spieghino questi comportamenti.

2. Si consideri la matrice tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Si costruisca il termine noto $\mathbf{b}$ cosicchè:

$$b_1 = b_n = \alpha + 1, \;\; b_i = \alpha + 2, \; i = 2, ..., n-1.$$

Calcolare il raggio spettrale delle matrici di iterazione P_J e P_{GS} (di Jacobi e Gauss-Seidel rispettivamente).

Risolvere quindi il sistema $Ax = b$ con i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel, partendo dalla soluzione iniziale $x^{(0)} = (1/n, 2/n, \dots, 1)^T$, con $tol = 1.e-3$, $\alpha = 2, 4$ e $n = 8, 16$.

3. Data la matrice tridiagonale $A \in R^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} d & -1 & & \\ -1 & d & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & d \end{pmatrix}$$

con $d \geq 2$ si risolva il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è un vettore assegnato, con un metodo iterativo. Valutando la norma euclidea della differenza tra due iterate successive, ovvero

$$\delta_{k+1} = \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k}\| \ ,$$

si presentano nella tabella seguente i valori, nei casi $d = 2$ e $d = 3$ rispettivamente, di alcune differenze:

	d=2		d=3
	⋮		⋮
456	7.2754e-3	16	1.0229e-4
457	7.2616e-3	17	6.5117e-5
458	7.2477e-3	18	4.1563e-5
459	7.2340e-3	19	2.6593e-5

- Si stimi in norma 2, il numero di iterazioni m necessarie nei casi $d = 2$ e $d = 3$ affinchè la differenza $\|\mathbf{x}^{k+m} - \mathbf{x}^{k+m-1}\| \leq 1.e-9$ partendo da $k = 458$ e $k = 18$, rispettivamente. (*Sugg.*: È noto che

  $$\delta_{k+1} \leq C_k \delta_k$$

  con C_k la norma 2 della matrice d'iterazione al passo k. Usando i valori tabulati, dapprima si determini un' approssimazione di C_k nei due casi $d = 2$ e $d = 3$ e quindi iterando ...)
- Scrivere inoltre un programma Matlab che risolve il sistema precedente usando il metodo di Jacobi, prendendo come dati in ingresso d, n, b, *tol*, senza allocare la matrice A e la matrice di iterazione di Jacobi, partendo da $\mathbf{x}^0 = 0$. Lo si applichi nel caso $d = 3$, $n = 10$, **b**=`ones(n,1)` e $tol = 1.e-9$.