

LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Autovalori di matrici: III

Università di Verona

Prof. S. De Marchi

Verona, 6 febbraio 2007

Quando la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è *tridiagonale simmetrica* o *simmetrica*, per la ricerca dei corrispondenti autovalori si usano il *metodo delle successioni di Sturm* e il *metodo di Jacobi*, rispettivamente.

1 Il metodo delle successioni di Sturm

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tridiagonale simmetrica. Indichiamo con \mathbf{d} e \mathbf{b} i vettori diagonale e extradiagonali (sopra e sotto la diagonale principale) di dimensioni n e $n - 1$, rispettivamente.

Sia A_i il minore principale di ordine i di A . Posto $p_0(x) = 1$, indichiamo con $p_i(x) = \det(A_i - xI_i)$. Si ha

$$\begin{aligned} p_1(x) &= d_1 - x; \\ p_i(x) &= (d_i - x)p_{i-1}(x) - b_{i-1}^2 p_{i-2}(x), \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Alla fine $p_n(x) = \det(A)$. La successione $\{p_i(x)\}$ è detta una *successione di Sturm*. Vale il seguente fatto: **per $i=2,\dots,n$ gli autovalori di A_{i-1} separano quelli di A_i** , ovvero

$$\lambda_i(\mathbf{A}_i) < \lambda_{i-1}(\mathbf{A}_{i-1}) < \lambda_{i-1}(\mathbf{A}_i) < \dots < \lambda_2(\mathbf{A}_i) < \lambda_1(\mathbf{A}_{i-1}) < \lambda_1(\mathbf{A}_i). \tag{2}$$

Inoltre, per ogni reale ν , definiamo

$$S_\nu = \{p_0(\nu), p_1(\nu), \dots, p_n(\nu)\}. \tag{3}$$

Allora $s(\nu)$, il numero di cambiamenti di segno in S_ν , indica il numero di autovalori di A strettamente minori di ν .

Da un punto di vista implementativo, per costruire A , noti i vettori \mathbf{d} e \mathbf{b} , basta usare il comando Matlab `A=diag(d)+diag(b,1)+diag(b,-1)`. Quindi si può procedere come segue:

- Scelgo un valore reale ν e costruisco l'insieme S_ν . Qui bisogna implementare le formule (1), ottenendo in output un array che contiene i numeri $p_i(\nu)$, $i = 0, 1, \dots, n$.
- Determino il numero $s(\nu)$ che mi dirà, grazie alla (2), quanti autovalori di A sono minori in senso stretto, di ν .
- Esiste un metodo, detto *metodo di Givens*, per determinare tutti gli autovalori di una matrice A tridiagonale simmetrica. Poniamo $b_0 = b_n = 0$ allora l'intervallo $I = [\alpha, \beta]$ con

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} (d_i - (|b_i| + |b_{i-1}|)), \quad \beta = \max_{1 \leq i \leq n} (d_i + (|b_i| + |b_{i-1}|)), \tag{4}$$

conterrà tutti gli autovalori di A (infatti α e β indicano gli estremi dell'intervallo di Ger-schgorin).

Per determinare l'iesimo autovalore di A , λ_i , una volta determinato $I = [\alpha, \beta]$, con il metodo di bisezione lo si determina operando come segue. Si costruiscono le successioni $a^{(i)}$ e $b^{(i)}$ come segue: $a^{(0)} = \alpha$, $b^{(0)} = \beta$, quindi si calcola $c^{(0)} = (a^{(0)} + b^{(0)})/2$, grazie alla proprietà (2), se $s(c^{(0)}) > n - i$ allora $b^{(1)} = c^{(0)}$ altrimenti $a^{(1)} = c^{(0)}$. Si continua finchè ad un passo k^* , $|b^{(k^*)} - a^{(k^*)}| \leq \text{tol}(|a^{(k^*)}| + |b^{(k^*)}|)$.

Procederemo poi in modo sistematico per calcolare tutti gli altri autovalori.

1. Data la matrice tridiagonale avente diagonale principale il vettore `d=ones(1,n)` e sopra e sotto diagonali il vettore `b=-2*ones(1,n-1)`. Con $n = 4$, calcolarne tutti gli autovalori usando il metodo di Givens delle successioni di Sturm. Per facilitare l'implemetazione si descrive l'M-function che determina le successione di Sturm e i suoi cambiamenti di segno.

```
function [p,cs]=succSturm(d,b,x)
%-----
% Calcolo della successione di Sturm 'p' in x
% a partire dai vettori d e b
% e dei corrispondenti cambiamenti di segno 'cs'
%-----
n=length(d); p(1)=1; p(2)=d(1)-x; for i=2:n,
    p(i+1)=(d(i)-x)*p(i)-b(i-1)^2*p(i-1);
end
cs=0; %contatore cambi di segno
s=0; %contatore dei segni costanti
for i=2:length(p),
    if(p(i)*p(i-1)<=0),
        cs=cs+1;
    end
    if(p(i)==0),
        s=s+1;
    end
end
cs=cs-s;
return
```

2 Metodo di Jacobi

Il metodo, come detto, si applica a *matrici simmetriche*. Genera una successione di matrici $A^{(k)}$ ortogonalmente simili ad A e convergenti verso una matrice diagonale i cui elementi sono gli autovalori di A .

Si parte da $A^{(0)} = A$. Per $k = 1, 2, \dots$ si fissa una coppia di interi p e q con $1 \leq p < q \leq n$ e si costruisce

$$A^{(k)} = (G_{pq})^T A^{(k-1)} G_{pq} \quad (5)$$

(ortogonalmente simile ad A) cosicchè

$$a_{i,j}^{(k)} = 0, \quad \text{se } (i,j) = (p,q).$$

La matrice G_{pq} è la matrice ortogonale di rotazione di Givens definita come segue

$$G_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \cos(\theta) & \sin(\theta) & & \\ & & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Siano $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$. Allora, gli elementi di $A^{(k)}$ che variano rispetto a quelli di $A^{(k-1)}$ per effetto della trasformazione (5) si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} a_{pp}^{(k)} & a_{pq}^{(k)} \\ a_{pq}^{(k)} & a_{qq}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{pp}^{(k-1)} & a_{pq}^{(k-1)} \\ a_{pq}^{(k-1)} & a_{qq}^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Il nostro scopo è trovare l'angolo θ che consente al passo k di annullare gli elementi extradiagonali di $A^{(k-1)}$ interessati dalla trasformazione. Ora, se $a_{pq}^{(k-1)} = 0$, allora $c = 1$ e $s = 0$. Se invece $a_{pq}^{(k-1)} \neq 0$, posto $t = s/c = \tan(\theta)$, il sistema (6) equivale alla soluzione dell'equazione

$$t^2 + 2\eta t - 1 = 0, \quad \text{con } \eta = \frac{a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}}{2a_{pq}^{(k-1)}}. \quad (7)$$

Nell'equazione precedente, se $\eta \geq 0$ si sceglie la radice $t = 1/(\eta + \sqrt{1 + \eta^2})$ altrimenti $t = -1/(-\eta + \sqrt{1 + \eta^2})$. Quindi c e s risultano

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad s = ct.$$

La convergenza del metodo si verifica calcolando la seguente quantità, valida per una generica matrice M

$$\Phi(M) = \left(\sum_{i,j=1, i \neq j}^n m_{ij}^2 \right)^{1/2} = \left(\|M\|_F^2 - \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Il metodo garantisce che $\Phi(A^{(k)}) \leq \Phi(A^{(k-1)})$, $\forall k$.

Una strategia ottimale di scelta degli indici p, q tale che $\Phi(A^{(k)}) \leq \Phi(A^{(k-1)})$ sia sempre verificata, è quella di scegliere l'elemento di $A^{(k-1)}$ tale che

$$|a_{p,q}^{(k-1)}| = \max_{i \neq j} |a_{i,j}^{(k-1)}|.$$

Una M-function che implementa il metodo di Jacobi, data A e una tolleranza tol e che restituisce la matrice diagonale D degli autovalori, il numero di iterazioni effettuate e la quantità $\Phi(\cdot)$, potrebbe essere come segue.

```
function [D,iter,phi]=symJacobi(A,tol)
%-----
% Data la matrice simmetrica A e una tolleranza tol, determina,
% mediante il metodo di Jacobi tutti i suoi autovalori che memorizza
% nella matrice diagonale D. Determina inoltre il numero di iterazioni,
% iter, e la quantità phi che contiene la norma degli elementi extra-diagonali
% e come converge il metodo.
%-----
n=max(size(A));
D=A;
phiD=norm(A,'fro');
epsi=tol*phiD;
phiD=phiNorm(D);
iter=0;
[phi]=phiD;

while (phiD > epsi)
    iter=iter+1;
    for p=1:n-1,
        for q=p+1:n
            [c,s]=calcoloCeS(D,p,q);
            D=calcoloProdottoGtDG(D,c,s,p,q);
        end;
    end
    phiD=phiNorm(D);
    phi=[phi; phiD];
end
return
```

2. Data la matrice di Hilbert di ordine 4 (in Matlab `hilb(4)`), i cui autovalori (arrotondati) sono $\lambda_1 = 1.5002$, $\lambda_2 = 0.1691$, $\lambda_3 = 0.0067$, $\lambda_4 = 0.0001$. Calcolare detti autovalori usando il metodo di Jacobi con una tolleranza `tol=1.e-15`. In quante iterazioni converge il metodo? Calcolare anche ad ogni iterazione la quantità $\Phi(A^{(k)})$ per verificare che decresce. (*Sugg.* Usare l'M-function `symJacobi` fornita: implementare le M-functions `calcoloCeS` e `calcoloProdottoGtDG`).

Tempo massimo: 2 ore.