LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Derivazione e Integrazione

Università di Verona

Prof. S. De Marchi

`Verona, 6 marzo 2007`

1 Approssimazione delle derivate di una funzione

Per approssimare le derivate di una funzione $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$ esiste un modo "semplice". Si prende una suddivisione equispaziata tale che $\{x_0 = a, \ldots, x_k = a + hk, \ldots, x_n = b\}$, con $h = (b-a)/n$, quindi si approssima, ad esempio $f'(x_i)$, con i valori di $f(x_k)$.

Gli schemi studiati in classe per approssimare $f'(x_i)$ sono i seguenti.

- `Differenze finite in avanti:` $\Delta_a f(x_i)$.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \frac{h^2}{2} f''(\xi_i), \quad i = 0, ..., n-1\,. \tag{1}$$

- `Differenze finite all'indietro,` $\Delta_i f(x_i)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h^2}{2} f''(\xi_i), \quad i = 1, ..., n\,. \tag{2}$$

- `Differenze finite centrali,` $\delta f(x_i)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_i), \quad i = 1, ..., n-1\,. \tag{3}$$

Naturalmente, secondo la regolarità di f, possiamo caratterizzare l'errore dovuto all'approssimazione di f' con uno degli schemi predetti.

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x) = \cos(\sin x^2)$ su $[0, \pi]$ e si prenda $n = 7$. Si approssimi $f'(x_3)$ e si fornisca una maggiorazione dell'errore con ciascuno dei tre schemi (1), (2) e (3) approssimando il valore delle derivate nel punto ξ_i, con la norma infinito della derivata nell'intervallo corrispondente. Si faccia poi vedere come cambia l'errore all'aumentare di n.

2 Integrazione numerica

Per il calcolo approssimato di integrali definiti, abbiamo visto due metodi importanti: la *formula dei trapezi* e il *metodo di Simpson.* Per entrambi i metodi, che sono di tipo *interpolatorio*, si sono viste sia la forma *semplice* che quella *composita.* Se indichiamo con $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, detti metodi si descrivono con le formule seguenti.

- `Formula dei trapezi semplice ed relativo errore.`

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))\ ,$$

$$I(f) - I_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)\ ,\ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula dei trapezi composita e relativo errore.` Qui dobbiamo prendere una suddivisione equispaziata di $[a,b]$ del tipo $\{x_0 = a, \ldots, x_i = a+ih, \ldots, x_n = b\}$, con $h = (b-a)/n$:

$$I_T^c(f) = \frac{h}{2}\,(f(a)+f(b)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\ ,$$

$$I(f) - I_T^c(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)\ ,\ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula di Simpson semplice e relativo errore.`

$$I_S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\ ,$$

$$I(f) - I_S(f) = -\frac{1}{16}\frac{(b-a)^5}{180} f^{(4)}(\xi),\ \ \xi \in (a,b)\ .$$

- `Formula di Simpson composita e relativo errore.` Qui dobbiamo prendere, come nel caso dei trapezi, una suddivisione equispaziata di $[a,b]$. Quindi nel generico intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, si considerano come punti di interpolazione x_{k-1},$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ e x_k. Posto $h = (b-a)/n$:

$$I_S^c(f) = \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n} \left[f(x_{k-1}) + f(\bar{x}_k) + f(x_k)\right]\ ,$$

$$I(f) - I_S^c(f) = -\left(\frac{b-a}{180}\right)\frac{h^4}{16} f^{(4)}(\xi),\ \ \xi \in (a,b)\ .$$

Per ottenere risultati più accurati, abbiamo visto che si possono usare **formule di quadratura di tipo gaussiano**.

Per costruire queste formule operiamo come segue. Partendo da una suddivisione equispaziata consideriamo, invece dei punti x_{k-1} e x_k, i punti

$$y_{k-1} = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ,\quad y_k = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ .$$

La formula di quadratura di Gauss composita si esprime allora come segue.

- `Formula di Gauss composita e relativo errore.`

$$I_G^c(f) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(f(y_{k-1}) + f(y_k) \right) \ ,$$

$$I(f) - I_G^c(f) = \frac{b-a}{4320} h^4 f^{(4)}(\xi) \ , \quad \xi \in (a,b).$$

Esercizio 2. Si calcoli numericamente

$$\int_0^{2\pi} x\mathrm{e}^{-x} \cos 2x dx = \frac{3(\mathrm{e}^{-2\pi} - 1) - 10\pi \mathrm{e}^{-2\pi}}{25} \approx -0.12212260462 \ ,$$

mediante le tre formule *composite* dei trapezi, di Simpson e di Gauss, con $n = 7$. Si determini anche l'errore assoluto. Se invece si prendesse $n = 10$, come cambierebbe l'approssimazione?

◊◊

Tempo massimo: 2 ore.