LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Interpolazione di funzioni e fenomeno di Runge

Università di Verona

Prof. S. De Marchi

`Verona, 13 febbraio 2007`

Si consideri la seguente *funzione di Runge*

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5] \,. \tag{1}$$

Presi $n+1$ punti equispaziati $x_k = -5+i \cdot h,\ i = 0, ..., n,\ \ h = 10/n$ il polinomio d'interpolazione di grado n, $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, si può costruire risolvendo il sistema lineare per determinare i coefficienti a_i:

$$V\,\mathbf{a} \;=\; \mathbf{y}\,,$$

con $\mathbf{a} = (a_0, ..., a_n)^T$, $y = (y_0, ..., y_n)^T$ (qui $y_i = g(x_i)$) e V che è *matrice di Vandermonde* i cui elementi sono $v_{i,j} = x_i^{j-1}$.

Diversamente, si può esprimere il polinomio di interpolazione $p_n(x)$ in *forma di Newton*,

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \cdots + b_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\,,$$

dove b_i rappresenta la differenza divisa di ordine i della funzione $g(x)$.

1. Per determinare i coefficienti $b_i,\ i = 0, ..., n$ possimo implementare l'*algoritmo delle differenze divise*. Ricordando però che gl'indici in Matlab partono sempre da 1, l'algoritmo richiesto si può scrivere come segue:

```
%----------------------------------------------------
% Algoritmo delle differenze divise
%
% Inputs
% x: vettore dei punti di interpolazione,
% y: vettore dei valori della funzione.
% Output
% b: vettore delle differenze divise b=[b_1,....b_{n+1}]
%----------------------------------------------------
n=length(y);
 b=y;
 for i=1:n,
  if i~=1,
    for j=2:i,
       b(i)=(b(i)-b(j-1))/(x(i)-x(j-1));
    end;
  end;
 end;
```

2. Il valore del polinomio p_n nel punto x, si determina con lo *schema di Hörner*:

$$\begin{aligned} p &= b_{n+1}; \\ p &= (x - x_i)p + b_i, \quad i = n, ..., 1 \end{aligned} \tag{2}$$

3. L' errore di interpolazione si può esprimere mediante la formula

$$E_n(g) = g(x) - p_n g(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} .$$

   Se $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, si dimostra che

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x_1, ..., x_{n+1}, x] . \tag{3}$$

   con x non necesssariamente scelto nell'intervallo $[a = x_1, b = x_{n+1}]$.

(i) Implementare come M-functions gli algoritmi 1. e 2. Fare quindi un programma Matlab che valuti e disegni la funzione $g(x)$ e il polinomio di interpolazione di gradi variabili da n=2 a n=15. Che fenomeno si osserva per $n > 11$? Calcolare anche l'errore d'interpolazione in un punto $x \neq x_i,\ x \in [-5, 5]$ mediante la formula (3).

(ii) Costruire il polinomio di interpolazione sui punti di *Chebyshev* in $[-1, 1]$

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, .., n$$

e confrontare i risultati con il caso (i).

⋄◊⋄

Tempo: 2 ore.