LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Autovalori di matrici: I

Università di Verona

Prof. S. De Marchi

`Verona, 16 gennaio 2007`

Data una matrice quadrata A $n \times n$, a coefficienti reali, i cui autovalori possono essere ordinati come segue:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \; .$$

Sia $\mathbf{x}_1$ l'autovettore corrispondente a λ_1. Se gli autovettori di A sono linearmente indipendenti,λ_1 e $\mathbf{x}_1$ si possono determinare con il *metodo delle potenze.*

- Dato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$, poniamo $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}/\|\mathbf{x}^{(0)}\|$.
- Per k=1,2,... calcolo

$$\mathbf{x}^{(k)} = A\mathbf{y}^{(k-1)}, \;\; \mathbf{y}^{(k)} = \frac{\mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|}, \;\; \lambda^{(k)} = (\mathbf{y}^{(k)})^T A\, \mathbf{y}^{(k)} \; .$$

La procedure si arresta in corrispondenza al primo indice k tale che $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| < \epsilon|\lambda^{(k)}|$.

Come noto il predetto metodo costruisce due successioni convergenti, ovvero

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^{(k)} = \alpha \mathbf{x}_1 \; ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{(k)} = \lambda_1 \; .$$

Perchè si chiama **metodo delle potenze**? Basta osservare che $\mathbf{y}^{(k)} = r^{(k)} A^k \mathbf{y}^{(0)}$, cioè appaiono le potenze della matrice A, con

$$r^{(k)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\|\mathbf{x}^{(i)}\|} \; .$$

1. Si consideri, per $\alpha \in \mathbb{R}$, la famiglia di matrici

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & 10 \\ 5 & 12 & 10 & 7 \\ 9 & 7 & 6 & 13 \\ 4 & 16 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

   Provare che se $\alpha = 30$ il metodo converge all'autovalore di modulo massimo in 27 iterazioni, mentre se $\alpha = -30$ il metodo richiede ben 1304 iterazioni partendo da $x^{(0)}$ =`ones(4,1)` con tolleranza $\epsilon = 1.e-10$. Come mai questo fatto?

   Per verificare l'esattezza dei calcoli, usare la funzione `eig(A)` di Matlab che restituisce tutti gli autovalori di una matrice quadrata A. Come ulteriore controllo determinare anche il residuo $A\,\mathbf{x}_1 - \lambda_1 \mathbf{x}_1$.

2. Sempre per la matrice dell'esempio precedente, con gli stessi valori del parametro α, determinare l'autovalore di modulo minimo λ_n mediante il *metodo delle potenze inverse* (ovvero il metodo delle potenze applicato ad A^{-1}).

3. Cercare l'/gli autovalore/i di A, con $\alpha = -30$, più vicino/i al numero $\eta = -15$. In pratica si tratta di applicare il metodo delle potenze inverse per il calcolo dell'autovalore minimo della matrice $A_\eta = A - \eta\, I$. Quindi l'autovalore cercato sarà $\lambda_\eta = \lambda_{min}(A_\eta) + \eta$.

   Come cambia il numero delle iterazioni se prendiamo $\eta = -17$?

Per $x^{(0)}$ ed ϵ usare gli stessi valori suggeriti al punto 1.

$\Diamond\Diamond$

Tempo massimo: 2 ore.