LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Interpolazione con funzioni splines cubiche

Università di Verona

Prof. S. De Marchi

`Verona, 20 febbraio 2007`

Si consideri una funzione $f(x)$ in un intervallo $I = [a, b]$ della retta reale. Si prenda una partizione di I (non necessariamente equispaziata)

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\ .$$

È noto che il problema di interpolazione con una spline *cubica* è equivalente alla soluzione di un sistema lineare $A \cdot m = d$ con A matrice tridiagonale simmetrica, definita positiva e diagonalmente dominante. Il vettore m, soluzione di detto sistema, è l'insieme dei momenti, ovvero

$$m_i = s''(x_i)$$

cioè il valore della derivata seconda della spline cubica nel punto d'interpolazione.

Implementare in Matlab il problema di interpolazione con *spline cubica vincolata* (significa che oltre ai valori della funzione $f(x)$ nei nodi si vuole che $s'(a) = f'(a)$ e $s'(b) = f'(b)$).

Per facilitare l'implementazione diamo alcuni suggerimenti implementativi. Le cose note sono: il vettore x dei nodi della partizione, il vettore y tale che $y_i = f(x_i)$, i valori $y'_1 = f'(a)$ e $y'_n = f'(b)$.

1. Costruire la matrice A e il vettore d come segue.
   - Costruire il vettore h, tale che $h_i = x_{i+1} - x_i$.
   - Costruire il vettore d, tale che $d_1 = \frac{y_2-y_1}{h_1} - y'_1$, $d_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}$, $i = 2, ..., n-1$ e $d_n = y'_n - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$.
   - Costruire la matrice A, tridiagonale simmetrica, tale che

     $$A_{1,1} = \frac{h_1}{3},\ \ A_{n,n} = \frac{h_{n-1}}{3}$$

     e

     $$A_{i,i+1} = \frac{h_i}{6},\ A_{i,i-1} = \frac{h_{i-1}}{6},\ A_{i,i} = \frac{(h_i + h_{i-1})}{3},\ \ i = 2, ..., n-1\ .$$

     Infine $A_{1,2} = A_{2,1}$ e $A_{n,n-1} = A_{n-1,n}$.
2. Risolvere il sistema $A \cdot m = d$.

3. Visualizzare i punti (x_i, y_i), $\quad i = 1, ..., n$ e la spline interpolante definita nell'intervallo $x_i \leq x < x_{i+1}$, $\; i = 1, ..., n-1$ come segue:

$$s(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3 m_i + (x - x_i)^3 m_{i+1}}{6h_i} + C\ (x_{i+1} - x) + D\ (x - x_i)$$

   dove le costanti C, D sono date dalle formule seguenti: $C = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i m_i}{6}$ e $D = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i m_{i+1}}{6}$.

Infine per la ricerca dell'intervallo a cui appartiene il generico punto x, si può fare una ricerca binaria o sequenziale. Un codice Matlab, per la ricerca sequenziale è il seguente:

```
function j=search_int(x,d);
%
% Cerca l'indice dell'intervallo a cui x appartiene.
%
for i=1:length(d)-1,
  if(x >= d(i) & x < d(i+1))
    j=i;
    break;
  end;
  if(x >= d(length(d)-1))
    j=length(d)-1;
    break;
  end;
end;
```

◊◊

Tempo massimo: 2 ore.