Esercitazioni di Laboratorio di Calcolo Numerico

Stefano De Marchi[*]

Verona, October 25, 2006

1 Analisi degli errori

1. Calcolare le espressioni $a + (b + c)$ e $(a + b) + c$ per $a = 1.0E + 308$, $b = 1.1E + 308$ e $c = -1.001E + 308$

2. Implementare le seguenti operazioni

   (a) $a = \frac{4}{3}$

   (b) $b = a - 1$

   (c) $c = b + b + b$

   (d) $e = 1 - c$

   Qual è il risultato finale?

3. Siano $x = 5$ e $y = 5 - \delta$ con $x - y = \delta$. L'errore relativo della differenza è

$$E_{x-y} = \frac{(x-y)(1+\epsilon) - (x-y)}{x-y}$$

   con ϵ che indica la precisione macchina.

   Calcolare E_{x-y} al diminuire di δ. Riportare su una tabella i valori δ, E_{x-y} e $E_{x-y} * 100$.

4. Per $x = 1.0E - 15$, calcolare $\dfrac{(1 + x) - 1}{x}$. Perchè l'espressione è inaccurata?

[*]Dipartimento di Informatica, Università di Verona

5. Si consideri il polinomio di settimo grado

$$p(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1\,.$$

Lo si valuti su 401 punti equispaziati $x \in [1 - 2 \cdot 10^{-8}, 1 + 2 \cdot 10^{-8}]$. Si plotti quindi il grafico di $p(x)$ e il grafico di $q(x) = (x-1)^7$ sugli stessi 401 punti equispaziati. Si discutano i risultati.

2 Algoritmi per il calcolo di π

Scrivere un programma Matlab che calcola π mediante gli algoritmi seguenti.

Algoritmo di Archimede

π è approssimato con l'area del poligono regolare di 2^n lati inscritto nella circonferenza di raggio 1.

Indicando con b_i il numero di lato dell'i-esimo poligono regolare iscritto,

$$s_i = \sin\left(\frac{\pi}{2^i}\right)$$

e A_i la corrispondente area, l'algoritmo si può così descrivere:

Algoritmo 1

$b_1 = 2;\ s_1 = 1$
`for i=2:n`
$A_i = b_{i-1}s_{i-1},\ s_i = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-s_{i-1}^2}}{2}}$
$b_i = 2b_{i-1}$
`end for`

Algoritmo di Viète

π è approssimato con il semiperimetro del poligono regolare di 2^n lati inscritto nella circonferenza di raggio 1.

Indicando con

$$c_i = \cos\left(\frac{\pi}{2^i}\right)$$

e p_i il corrispondente semiperimetro, l'algoritmo si descrivere come segue:

Algoritmo 2

$c_1 = 0;\ p_1 = 2$
`for i=2:n`

$c_i = \sqrt{\frac{1+c_{i-1}}{2}}$
$p_i = \frac{p_{i-1}}{c_i}$
`end for`

Algoritmo di Wallis

π è approssimato con la formula:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\;\frac{4}{3}\frac{4}{5}\;\cdots\;\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\;\cdots\quad n \geq 1\ .$$

Indicando con p_i la produttoria al passo i, l'algoritmo si descrivere come segue:

Algoritmo 3

$p_0 = 2;$
`for i=1:n,`
$p_i = p_{i-1}\frac{4i^2}{4i^2-1};$
`end for`

$$\pi = 4\ \mathbf{arctg}(1)$$

π è approssimato con la formula:

$$\text{arctg}(1) = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\ \cdots\right).$$

Indicando con q_i la somma al passo i, l'algoritmo si descrivere come segue:

Algoritmo 4

$q_1 = 1;$
`for i=2:n`
$q_i = q_{i-1} + \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1}$
`end for`

$$\pi = 6\ \mathbf{arcsin}(\tfrac{1}{2})$$

π è approssimato con la formula:

$$\arcsin(\frac{1}{2}) = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{2^5} +\ \cdots\right).$$

Indicando con q_i la somma al passo i e t_i il “punto” corrente, l'algoritmo si descrivere come segue:

Algoritmo 5

$q_1 = 0;\ t_1 = \frac{1}{2}$

```
for i=1:n-1
```

$q_{i+1} = q_i + \frac{t_i}{2i-1};\ \ t_{i+1} = \frac{t_i(2i-1)}{8i}$

```
end for
```

$pi = 6q_n$