LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Integrazione composita, gaussiana e metodo di Romberg

Università di Verona

Prof. S. De Marchi

`Verona, 25 marzo 2009`

1 Integrazione numerica

Per il calcolo approssimato di integrali definiti, abbiamo visto due metodi importanti: la *formula dei trapezi* e il *metodo di Simpson.* Per entrambi i metodi, che sono di tipo *interpolatorio*, si sono viste sia la forma *semplice* che quella *composita*. Se indichiamo con $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, detti metodi si descrivono con le formule seguenti.

- `Formula dei trapezi semplice ed relativo errore.`

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \ ,$$

$$I(f) - I_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \ , \ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula dei trapezi composita e relativo errore.` Qui dobbiamo prendere una suddivisione equispaziata di $[a,b]$ del tipo $\{x_0 = a, \ldots, x_i = a+ih, \ldots, x_n = b\}$, con $h = (b-a)/n$:

$$I_T^c(f) = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \ ,$$

$$I(f) - I_T^c(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \ , \ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula di Simpson semplice e relativo errore.`

$$I_S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \ ,$$

$$I(f) - I_S(f) = -\frac{1}{16}\frac{(b-a)^5}{180} f^{(4)}(\xi), \ \ \xi \in (a,b) \ .$$

- `Formula di Simpson composita e relativo errore.` Qui dobbiamo prendere, come nel caso dei trapezi, una suddivisione equispaziata di $[a,b]$. Quindi nel generico intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, si considerano come punti di interpolazione x_{k-1},$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ e x_k. Posto $h = (b-a)/n$:

$$I_S^c(f) = \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{k-1}) + f(\bar{x}_k) + f(x_k)\right] \ ,$$

$$I(f) - I_S^c(f) = -\left(\frac{b-a}{180}\right)\frac{h^4}{16} f^{(4)}(\xi), \ \ \xi \in (a,b) \ .$$

Esercizio 1. Si calcoli numericamente

$$\int_0^{2\pi} x\mathrm{e}^{-x}\cos 2x dx = \frac{3(\mathrm{e}^{-2\pi}-1)-10\pi\mathrm{e}^{-2\pi}}{25} \approx -0.12212260462\ ,$$

mediante le formule *composite* dei trapezi e di Simpson, determinando *a priori* il numero di punti necessari affinché gli errori assoluti siano in modulo minori $tol = 1.e-6$. Si determini anche l'errore assoluto rispetto al valore esatto.

1.1 Formule gaussiane

- `Formula di Gauss composita e relativo errore.`

  Per ottenere risultati più accurati, abbiamo visto che si possono usare **formule di quadratura di tipo gaussiano**.

  Per costruire queste formule operiamo come segue. Partendo da una suddivisione equispaziata consideriamo, invece dei punti x_{k-1} e x_k, i punti

$$y_{k-1} = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ,\quad y_k = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ .$$

  La formula di quadratura di Gauss composita si esprime allora come segue.

$$I_G^c(f) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(f(y_{k-1})+f(y_k)\right)\ ,$$

$$I(f) - I_G^c(f) = \frac{b-a}{4320}h^4 f^{(4)}(\xi)\ ,\ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula di Gauss-Legendre` La formula di quadratura di *Gauss-Legendre* si può esprimere

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(z_i)\ . \qquad (1)$$

  ove, il vettore dei nodi **z** e dei pesi **w** si possono determinare con la M-function:

```
 function [z,w]=zwlegendre(n)
% This function computes nodes z and weights
% w of the Gauss-Legendre quadrature formula.
%---------------------------------------------
% Input:
%      n = number of quadrature nodes
%Outputs:
%      z = column vector of the nodes
%      w = column vector of the weights
%---------------------------------------------
```

```
if n<=1
    z=[0]; w=[2];
    return
end
A=zeros(n);k=[1:n-1];
v=k./(sqrt(4*(k.^2)-1));
A=A+diag(v,1)+diag(v,-1);
[w,z]=eig(A);
nm2=sqrt(diag(w'*w));
w=(2*w(1,:)'.^2)./nm2;
z=diag(z);
```

Esercizio 2 Calcolare l'integrale di $f(x) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos(x)$ su $[-1, 1]$ a meno di $\mathtt{tol} = 1.e - 9$ mediante le formule di Gauss composite.

Si chiede inoltre di calcolare l'integrale (1) con la formula di Gauss-Legendre costruita prendendo $n = 2^i, \ i = 0, 1, \ldots, imax = 8$ punti a meno di $\mathtt{tol} = 1.e - 9$ (ci si arresterà quando $n > 2^8$ oppure l'errore in modulo diventa minore di tol, assumendo come valore esatto quello che si ottiene con la funzione `quadl`).

1.2 Quadratura con il metodo di Romberg

Il metodo di Romberg per la quadratura si applica usando la seguente *ricetta*: si costruisce una tabella, $\mathbf{T}$ triangolare (inferiore), la cui prima colonna consiste dei valori approssimati dell'integrale mediante la formula trapezoidale costruita usando suddivisioni regolari con $N = 2^m, \ m = 0, 1, 2, \ldots$ punti.

Se indichiamo con $T_{i,1}$ il generico elemento della prima colonna di $\mathbf{T}$, che contiene il valore dell'integrale calcolato con la formula trapezoidale con passi $h_i = 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$, gli elementi delle successive colonne sono costruiti mediante la ricorrenza

$$T_{i,k} = \frac{4^k T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^k - 1}\ , \quad k \geq 2. \tag{2}$$

Esercizio 3. Ricordando che ciascuna formula $T_{1,k}, T_{2,k}, T_{3,k}, \ldots$. è una formula di grado di esattezza $2k - 1$, calcolare l'integrale di $f(x) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos(x)$ su $[-1, 1]$ per $k = 3$.

1.3 Esercizi da appelli d'esame

1. Si consideri la matrice $A = \mathtt{toeplitz}([10, -1, -1, 2, 0, 0]) \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ che possiamo decomporre in $A = M + D + N$ con $D = \mathtt{diag(diag(A))}$, $M = \mathtt{triu(A)} - \mathtt{D}$ e $N = A - M - D$.

   Si considerino i seguenti schemi iterativi

   (i) $(M + D)x^{(k+1)} = -Nx^{(k)} + b\,,$

   (ii) $Dx^{(k+1)} = -(M + N)x^{(k)} + b\,,$

   (iii) $(M + N)x^{(k+1)} = -Dx^{(k)} + b\,.$

(a) Dire quali di essi è convergente e quale convergerà più velocemente.

(b) Sia poi `b=1:6`. Si calcoli la soluzione del sistema $A\,x = b$ con uno dei metodi convergenti, a partire dalla soluzione $x^{(0)}$ =`[ones(2,1);zeros(4,1)]` a meno di $tol = 1.e-6$. Si plotti anche l'errore assoluto, $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ per ognuno dei metodi convergenti.

2. Data la funzione $f(x) = \sin(2x - \pi\, x^2)$ sull'intervallo $I = [-2, 3]$, si determini il grado massimo del polinomio interpolante in forma di Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i), \quad n \geq 5 \tag{3}$$

dove i punti d'interpolazione x_i sono i punti di Chebyshev, per cui l'errore assoluto $E_n = \|p_n - f\|_\infty$ risulta essere $\leq 1.e-2$.

Per valutare il polinomio su un insieme `x=linspace(-2,3,1000)` di punti target, il calcolo di l_i su x si può fare usando la seguente funzione.

```
function l = lagrai_target(z,x,i)
%-----------------------------------------------------
% Calcola l'i-esimo pol. elementare di Lagrange
% z = nodi di interpolazione
% x = vettore (colonna!) di punti target su cui valutare l_i
% i = indice del polinomio
%
% l = vettore dei valori di l_i sui targets
%-------------------------------------------------
n = length(z); m = length(x);

l = prod(repmat(x,1,n-1)-repmat(z([1:i-1,i+1:n]),m,1),2)/...
prod(z(i)-z([1:i-1,i+1:n])); return
```

Pertanto una volta costruita la matrice L, che ha tante righe quante il grado n, la valutazione (3) si farà con un semplice prodotto vettore-matrice.

Infine, si chiede di fare il plot della funzione, del polinomio interpolante (al grado massimo) nonchè dell' andamento dell'errore assoluto al variare del grado `n=5:Nmax`.