Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2014-15
Prof. S. De Marchi
Padova, 14 luglio 2015

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco. **Si può usare solo la calcolatrice.**

---

1 Domande di teoria

1. Si dimostri che dati $n+1$ punti $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2,\ i = 0, ..., n$, la curva di Bézier

$$b_n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{n,i}(t),\ t \in [0,1] \tag{1}$$

con $B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, i-esimo polinomio di Bernstein di grado n, è tale che $b_n(0) = P_0$ e $b_n(1) = P_n$. [Vale 5/30]

Sugg. Anzitutto ricordare che nella definizione dei polinomi di Bernstein si usa la convenzione che $0^0 = 1$. Se si avessero difficoltà a comprendere si suggerisce di analizzare il caso con $n = 2$.

Risposta. Basta ricordare che per i polinomi di Bernstein si ha: $B_{n,0}(0) = 1$ e $B_{n,i}(0) = 0$ per $i > 0$. E ancora: $B_{n,n}(1) = 1$ e $B_{n,i}(1) = 0$ per $i < n$. Pertanto per $t = 0$ l'unico termine che sopravvive in (1) è il primo, che vale 1, quindi $b_n(0) = P_0$. Analogamente si ragiona per $b_n(1) = P_n$.

2. Si costruisca un codice Matlab che risolve il seguente problema [Vale 10/30]

   - Costruisce la matrice di Vandermonde `V1`, mediante la funzione built-in `vander`, su un vettore `x` di $n = 5$ punti equispaziati dell'intervallo $[0, \pi]$. Usare poi il seguente ciclo per ottenere la matrice `V`, cosicche' $V_{i,j} = x_i^j$

```
for k=1:n
    V(:,k)=V1(:,n-k+1);
end
```

   - Si chiami poi con `b` il vettore dei valori corrispondenti della funzione $f(x) = \sin(2x - 1) + x$ (che si desidera interpolare).

- Risolve il sistema lineare con il `backslash`.
- Valuta il polinomio interpolante di grado 4 su un insieme di 1000 punti di valutazione di $[0, \pi]$ calcolando anche l'errore il norma infinito. Per la valutazione usare Hoerner. Ricordo che se desideriamo valutare il polinomio *in un punto* $x0$ lo schema è

```
p=a(n);   % n= num. coefficienti del polinomio (grado n-1)
 for k=n-1:-1:1,
    p=p*x0+a(k);
  end
```

- Fare il poi il plot sia della funzione che del polinomio sullo stesso insieme di punti di valutazione

Risposta. Si tratta di costruire il seguente M-file

```
clear all; close all;
n=5; m=1000;
x=linspace(0,pi,n);
b=sin(2*x-1)+x;  % termine noto
V1=vander(x');      %matrice di Vandermonde
for k=1:n
   V(:,k)=V1(:,n-k+1);
end
a=V\b';       % trovo i coefficienti del polinomio
xx=linspace(0,pi,m); % punti di valutazione
yy=sin(2*xx-1)+xx;   % funzione nei punti di valutazione

% Horner per valutare il polinomio nei punti di valutazione
for i=1:m
p(i)=a(n);
 for k=n-1:-1:1,
    p(i)=p(i)*xx(i)+a(k);
    end
end

err=norm(yy-p,inf); % errore
plot(xx,yy,'r-.',xx,p,'b--');  %plot comparativo
```

2 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x,\ x \in [-1, 1]$.

   (i) Si costruisca il polinomio d'interpolazione di f, $p_2(x)$ (di grado 2), in *forma di Newton* su punti equispaziati. Calcolare quindi l'errore assoluto $e_2(x) = |f(x) - p_2(x)|$ e l'errore relativo $\epsilon_2 = |f(x) - p_2(x)|/|f(x)|$ per $x = -0.5$. [Vale 5/30]

   (ii) Si scriva il polinomio d'interpolazione $p_2(x)$ in *forma di Lagrange*. [vale 3/30].

   (NB: usare numeri con 4 cifre decimali)

   Soluzione.

   (i) Costruisco le differenze divise di ordine 2 sui punti $\{-1, 0, 1\}$ e valori $\{0.4142, 1, 2.4142\}$

   $$\begin{array}{rrrr} -1 & \mathbf{0.4142} & & \\ 0 & 1 & \mathbf{0.5858} & \\ 1 & 2.4142 & 1.4142 & \mathbf{0.4142} \end{array}$$

   Il polinomio cercato è $p_2(x) = 0.4142 + 0.5858(x + 1) + 0.4142(x + 1)x$. Gli errori richiesti sono quindi è $e_2(-0.5) = 0.0145$ ed $\epsilon_2(-0.5) = 0.0145/0.6180 = 0.0235$.

   (ii) In forma di Lagrange. Poiché $l_0(x) = x(x-1)/2,\ l_1(x) = (x+1)(1-x),\ l_2(x) = (x+1)x/2$ si ha $p_2(x) = l_0(x)f(-1)+l_1(x)f(0)+l_2(x)f(1) = 0.4142x(x-1)/2+(x+1)(1-x)+2.4142x(x+1)/2$. Possiamo verificare che interpola. Infatti $p_2(-1) = 0.4142 = f(-1)$, $p_2(0) = 1 = f(0)$ e $p_2(1) = 2.4142 = f(1)$.

2. Si consideri la formula di quadratura $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)\,.$

   (a) Mostrare che la formula di quadratura ha grado di esattezza 2 se e solo se i numeri a_1, a_2, x_1, x_2 verificano le relazioni

   $$a_1 = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2},\ a_2 = \frac{1}{1+\alpha^2},\ x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}$$

   con $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   Sugg. La formula deve essere esatta sui monomi fino a grado 2, $\{1, x, x^2\}$ ...... Porre poi $x_1 = 1/2 + 1/(2\alpha\sqrt{3})$... . [vale 6/30]

   (b) Per quali valori di α i pesi di quadratura risultano uguali? [vale 1/30]

   (c) Preso uno dei valori di α del punto precedente, si determini il valore dei punti x_1 e x_2 con 3 cifre decimali. Cosa si nota? [vale 3/30]

Soluzione.

(a) Chiedendo l'esattezza sui polinomi di secondo grado, si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= \int_0^1 dx = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \\ a_1x_1^2 + a_2x_2^2 &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dalle prime due equazioni si ricavano

$$a_1 = \frac{x_2 - 1/2}{x_2 - x_1},\ a_2 = \frac{x_1 - 1/2}{x_1 - x_2}$$

dalla terza quindi

$$-x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow (x_1 - 1/2)(x_2 - 1/2) = -1/12\,.$$

Posto $x_1 = 1/2 + 1/(2\alpha\sqrt{3})$ si ottengono le espressioni richieste.

Il viceversa è pure vero: ovvero per quelle espressioni dei coefficienti la formula ha grado di esattezza 2.

(b) Basta che $\alpha^2 = 1$ ovvero se e solo se $\alpha = \pm 1$.

(c) Per $\alpha = 1$, $x_1 = 0.5(1 + 1/\sqrt{3}) \approx 0.789$ e $x_2 = 0.5(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.211$
Per $\alpha = -1$, $x_1 = 0.5(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.211$ mentre $x_2 = 0.5(1 + 1/\sqrt{3}) \approx 0.789$.
Come si vede i punti sono interni e simmetrici rispetto al centro dell'intervallo.

Tempo: **2.5 ore**.