Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2014-15
Prof. S. De Marchi
Padova, 15 febbraio 2016

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

---

1 Domande di teoria

1. Dato un metodo iterativo per la soluzione di un'equazione non lineare $x_{k+1} = g(x_k)$ (con g funzione d'iterazione). Si dimostri che *"se g é derivabile e $|g'(x)| \le \mu < 1$ per ogni $x \in I_\alpha$, con I_α intorno della radice α, allora g ha un unico punto fisso α"*. [Vale 7/30]

   Risposta. Dal fatto che

   $$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|g(x_k) - g(\alpha)|}{|x_k - \alpha|} \underbrace{=}_{derivabilità} |g'(\alpha)| \le \mu < 1$$

   si puó applicare il Teorema 1 di pag. 42 (o delle contrazioni) che sostanzialmente garantisce che l'errore diminuisce ovvero

   $$|x_{k+1} - \alpha| \le \mu^{k+1} |x_0 - \alpha|$$

   e concludere che g ha un unico punto fisso α tale che $g(\alpha) = \alpha$.

2. Si scriva un codice Matlab che calcola numericamente, usando la *formula trapezoidale* (o composita dei trapezi), l' integrale

   $$\int_0^\pi \cos(x^2) - x\sin(x)dx \approx -2.5759$$

   usando $N = 20$ intervalli, e determina anche l'errore assoluto rispetto al valore "vero" ottenuto con la funzione built-in di Matlab `quadl(fun,0,pi)`, dove `fun=inline(...)` definisce la funzione integranda. [Vale 6/30]

   Quanto vale l'integrale in $[-\pi, \pi]$?. [vale 2/30]

   Risposta. Si tratta di costruire il seguente script

```
clear all; close all;
fun=inline('cos(x.^2)-x.*sin(x)');
esatto=quadl(fun,0,pi);
N=20;
h=pi/N; %passo d'integrazione
punti=0:h:pi;
valori=fun(punti);
calcolato=h/2*(valori(1)+2*sum(valori(2:N-1))+valori(N));
errore=abs(esatto-calcolato);
```

La funzione è pari (somma di funzioni pari). Pertanto l'integrale è il doppio di quello prima ottenuto.

2 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = \sin(x - 3/2), \ x \in [-\pi, \pi]$.

   (i) Quante radici reali ha la funzione f nell'intervallo di riferimento? Si diano le espressioni analitiche [vale 2/20].

   (iii) Mediante il metodo di Newton determinare la radice di modulo maggiore α_M e presentare in una tabella i risultati delle iterate x_0, x_1, x_2, x_3 e degli errori assoluti relativi $e_i = |x_i - \alpha_M|$. Cosa si nota circa la convergenza? [vale 6/30].

   (NB: fornire i risultati arrotandati a 4 cifre decimali)

   Soluzione.

   (i) Le radici si determinano ricordando $\sin(y) = 0$ quando $y = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$. Pertanto nel nostro caso $y = x - 3/2 = k\pi$ consentono di determinare 2 radici $\alpha_1 = 3/2 = 1.5000$ (che si ottiene per $k = 0$) e $\alpha_2 = 3/2 - \pi \approx -1.6416$ per $k = -1$. Quest'ultima è anche quella di modulo maggiore che chiameremo α_M

   (iii) Il metodo di Newton da la funzione d'iterazione

   $$g(x) = x - \frac{\sin(x - 3/2)}{\cos(x - 3/2)}\,.$$

x_{k+1}	$x_0 = -1.8$	$x_1 = -1.6403$	$x_2 = -1.6416$	$x_3 = -1.6416$
$\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_0\rvert = 0.1584$	$\lvert e_1\rvert = 0.0013$	$\lvert e_2\rvert = 7.3464e - 06$	$\lvert e_2\rvert = 7.3464e - 06$

Table 1: Tabella dei valori delle 3 iterate di Newton e degli errori assoluti

   Si nota come con 4 decimali le 2 e 3 sono sostanzialmente uguali anche se in effetti non lo sono (usando doppia precisione si apprezza la differenza).

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

   (a) Senza calcolarlo, dire perchè $\det(A) > 0$. [vale 2/30]

   (b) Si consideri ora il sistema lineare $Ax = b$ la cui soluzione è `x=[0 1 0 1 0]'`. Partendo da $\mathtt{x}^{(0)} = \mathtt{ones}(5,1)$ e usando il *metodo iterativo di Jacobi*, si determini $\mathtt{x}^{(3)}$. Si calcoli inoltre l'errore relativo $er_3 = \|x^{(3)} - x\|/\|x^{(3)}\|$ in norma 2 o infinito (fornendo i risultati approssimati a 4 decimali). Cosa si nota? [vale 6/30].

(c) *Facoltativo*: come si calcolerebbero gli autovalori di A? [vale 2/30]

Soluzione.

(a) La matrice è strettamente diagonalmente dominante per righe, simmetrica e con elementi positivi sulla diagonale. Pertanto tutti i cerchi di Gerschgorin, sono in effetti degli intervalli definiti sul semiasse positivo delle ascisse che non toccano mai l'origine. Quindi complessivamente il determinante è positivo.

(b) Osservo che `b=A*ones(5,1)`=$(2,\ 5,\ 0,\ 6,\ 1)^T$. Pertanto la matrice di Jacobi è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 0 & 0 & 0 \\ -2/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & -1/9 & 0 \end{bmatrix}$$

il termine noto è $q = (2/5, 1, 0, 1, 1/9)'$. Si ottengono le seguenti iterate

$$\mathtt{x}^{(1)} = (0, 3/5, 0, 5/6, 0); \mathtt{x}^{(2)} = (4/25, 1, 0, 1, 1/54);$$

ed

$$\mathtt{x}^{(3)} = (0, 117/125 = 0.9360, 0, 323/324 = 0.9969, 0);$$

Infine

$er_{3,\infty} = (8/125) * (324/323) = 0.0642$ (oppure in norma 2 $er_{3,2} = 0.0469$)

(c) Essendo la matrice formata da 3 blocchi, quello 2x2 della prima e seconda riga, la terza riga e il blocco 2x2 formato dalla quarta e quinta riga, gli autovalori si ottengono risolvendo i tre blocchi indipendentemente.

Dal primo blocco si ottengono gli autovalori $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$. La terza riga ci da $\lambda_3 = 3 = \lambda_2$. Risolvendo il terzo blocco $\lambda_4 = (15 + \sqrt{13})/2 \approx 9.3028$ e $\lambda_5 = (15 - \sqrt{13})/2 \approx 5.6972$.

Tempo: **2.0 ore**.