Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2014-15
Prof. S. De Marchi
Padova, 15 settembre 2015

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

---

1 Domande di teoria

1. Dato un metodo iterativo per la soluzione di un sistema lineare $x^{k+1} = Px^k + q$ (con P matrice d'iterazione). Si dimostri che *"condizione necessaria per la convergenza è che esista una norma di matrice indotta per cui* $\|\cdot\|$*, per cui* $\|P\| < 1$*"*. [Vale 7/30]

   Risposta. La dimostrazione è semplicemente quella del Teorema 5 di p. 91 del libro di testo.

2. Si scriva un codice Matlab che calcola numericamente, usando la *formula semplice di Simpson*, l' integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{2} e^{-x/2} \cos(x) dx \approx -0.1224$$

   e determina anche l'errore assoluto rispetto al valore "vero" ottenuto con la funzione built-in di Matlab `quadl(@fun,-1,1)`, dove `fun` è la M-function (di cui si chiede il pure il codice Matlab) che definisce la funzione integranda. [Vale 6/30]

   Sapendo che l'integrale vale circa -0.1224, si calcoli l'errore assoluto con 2 cifre decimali. [vale 2/30]

   Risposta. Si tratta di costruire il seguente M-file

```
clear all; close all;
esatto=quadl(@fun,-1,1);
h=1; %passo h di Simpson: i punti sono -1,0,1.
calcolato=h/3*(fun(-1)+4*fun(0)+fun(1));
errore=abs(esatto-calcolato)
```

Questa è la function che definisce la funzione integranda

```
function y=fun(x)
   y=x/2.*exp(-x/2}.*cos(x);
end
```

Sapendo che il valore dell'integrale con Simpson é: $1/3*(-0.4454+4*0+0.1639) = -0.0938$ allora l'errore assoluto arrotondato a due cifre decimali vale 0.03.

2 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = \cos(x) - \sin(x),\ x \in [0, \pi]$.

   (i) Si determinino i 3 polinomi elementari di Lagrange, $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ di grado 2 costruiti sui punti d'interpolazione equispaziati $\{0, \pi/2, \pi\}$ e si valutino in $x = 1$. [vale 3/30].

   (ii) Si calcoli l'errore assoluto $e_2(1) = |p_2(1)-f(1)|$, con p_2 polinomio d'interpolazione di grado 2 in forma di Lagrange. [vale 2/30]

   (iii) Si stimi l'errore d'interpolazione in $[0, \pi]$ con la formula

   $$r_n = \frac{h^{n+1}}{4 \cdot (n+1)} \max_{x \in [0,\pi]} |f^{(n+1)}(x)|\,,$$

   con $h = \pi/2$ ed $n = 2$ [vale 3/30] .

   (NB: fornire i risultati sempre arrotandati a 2 cifre decimali)

   Soluzione.

   (i) $l_0(1) = \dfrac{(1 - \pi/2)(1 - \pi)2}{\pi^2} \approx 0.25, l_1(1) = \dfrac{4(\pi - 1)}{\pi^2} \approx 0.87, l_2(1) = \dfrac{2(1 - \pi/2)}{\pi^2} \approx -0.12.$

   (ii) $p_2(1) = l_0(1)f(0) + l_1(1)f(\pi/2) + l_2(1)f(\pi) \approx -0.5$. $f(1) \approx -0.30$. Da cui $e_2(1) \approx 0.2$.

   (iii) Essendo $h = \pi/2$ e $f^{(3)}(x) = \sin(x) + \cos(x)$ il cui massimo, assunto in $\pi/4$ vale $\sqrt{2}$, si ottiene

   $$r_2 = (\pi/2)^3\sqrt{2}/12 \approx 0.46$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) Senza calcolarlo, dire perchè $\det(A) > 0$. [vale 2/30]

(b) La matrice è irriducibile? [vale 3/30]

(c) Si consideri ora il sistema lineare $Ax = b$ la cui soluzione è `x=ones(5,1)`. Partendo da $\mathtt{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0, 1]^T$ e usando il metodo iterativo $\mathtt{x}^{(k+1)} = (A - \theta I)\mathtt{x}^{(k)} + \theta\mathtt{b}$ con $\theta = 1/2$, si determini $\mathtt{x}^{(1)}$. Si calcolino le norme $\|x^{(1)}\|_1$, $\|x^{(1)}\|_2$ e $\|x^{(1)}\|_\infty$ (fornendo i risultati approssimati a 2 decimali) [vale 4/30].

Soluzione.

(a) La matrice è strettamente diagonalmente dominante per righe. Pertanto tutti i cerchi di Gerschgorin non toccano mai l'origine e in questo caso sono tutti a parte reale positiva. Se ci sono autovalori complessi coniugati, $a + ib$ e $a - ib$, il loro prodotto è $a^2 + b^2$ che è positivo (non possono esserci più di 4 complessi coniugati). Quindi complessivamente il determinante è positivo.

(b) La matrice è irriducibile perchè il grafo associato è fortmente connesso: esiste un cammino chiuso che partendo da ogni nodo raggiunge tutti gli altri. Disegnandolo si vede facilmente.

(c) Osservo che `b=A*ones(5,1)`$=(7,\ 4,\ 35/6,\ 3,\ 6)^T$. Pertanto

$$\mathtt{x}^{(1)} = (A - \frac{1}{2}I)\mathtt{x}^{(0)} + \frac{1}{2}\mathtt{b} = (7/2,\ 2,\ 35/12,\ 5/2,\ 21/2)^T$$

e $\|x^{(1)}\|_1 \approx 21.42,\ \|x^{(1)}\|_2 \approx 11.89$ e $\|x^{(1)}\|_\infty = 21/2$

Tempo: **2.0 ore**.