Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2014-15
Prof. S. De Marchi
Padova, 22 giugno 2015

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco. **Si può usare solo la calcolatrice.**

---

1 Domande di teoria

1. Per la convergenza del metodo del punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$ per risolvere $f(x) = 0$, si richiede che $|g'(x)| < 1$ in un intorno che contiene lo zero α? Perchè? [Vale 7/30]

   Risposta. Sostanzialmente se $|g'(x)| < 1,\ \forall\, x \in I_\alpha$, siamo garantiti che la metodo *contrae*, cioé fa avvicinare le iterate al valore di α. Per completare la risposta poi si doveva introdurre l'ordine p di convergenza di un metodo e nel caso $p = 1$

   Teorema 1 *Se $g(x)$ è derivabile in I_α ed esiste un numero $\mu < 1$ t.c.*

   $$|g'(x)| \le \mu, \ \ \forall \ x \in I_\alpha\,; \tag{1}$$

   allora $g(x)$ ha un `unico` *punto fisso α. Inoltre la successione generata dal metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ converge ad α per ogni scelta di $x_0 \in I_\alpha$. Infine si ha*

   $$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = |g'(\alpha)|\,. \tag{2}$$

2. Si voglia ora trovare con un metodo iterativo di punto fisso lo zero $\alpha \approx 2.0021$ di $f(x) = \exp(-x\log(1.2)) - \log(x)$ (osservo che log, come convenzione Matlab, indica il logaritmo naturale). Si scriva una funzione Matlab che ha come inputs, la funzone d'iterazione `g`, il valore iniziale `x0`, la tolleranza `tol` e il numero `nmax` d'iterazioni. In output restituisce il valore della soluzione `sol`, il numero d'iterazioni`iter` e il vettore degli errori `err` le cui componnenti sono `err(i)` $= |x_i - x_{i-1}|$.

   La chiamata sarà quindi del tipo

   ```
   function [sol, iter, err]=MetodoPuntoFisso(g, x0, tol, nmax)
   ```

Scrivere anche la funzione Matlab che implementa la funzione `g`.

Quale funzione predefinita (built-in) di Matlab si usa per risolvere un'equazione $f(x) = 0$? Come si scriverebbe la chiamata per risolvere l'equazione data? [Vale 9/30]

Risposta.

La funzione $f(x) = \left(\frac{6}{5}\right)^{-x} - \log(x)$ ha un solo zero $\alpha \approx 2.0021$. Per calcolarlo basta usare il metodo iterativo $x_{k+1} = x_k + f(x_k) = x_k + \exp(-x_k \log(1.2)) - \log(x_k)$ in quanto l'uguaglianza è sempre vera. Pertanto la funzione d'iterazione è $g(x) = x + \exp(-x \log(1.2)) - \log(x)$.

La function che implementa la funzione d'iterazione è

```
function [y]=g(x)
  y=x+exp(-x*log(1.2))-log(x)
end
```

La funzione che implementa il metodo iterativo è come al solito la seguente

```
function [sol, iter, err]=MetodoPuntoFisso(g, x0, tol, nmax)
x1=g(x0); iter=1;
err(iter)=abs(x1-x0);
while err(iter) > tol*abs(x1) & iter<= nmax
 x0=x1; x1=g(x0); iter=iter+1; err(iter)=abs(x1-x0);
 end
 if iter>nmax
   error('Raggiunto numero max iterazioni');
   end
 sol=x1; iter=iter-1;
```

La funzione di Matlab disponibile per trovare zeri di funzione è `fsolve` oppure `fzero` che si chiama come segue `sol=fsolve(f,x0,tol)`. In tal caso dovremo definire la funzione `f` come segue `f=@(x) exp(-x*log(1.2))-log(x);`.

2 Esercizi

1. Si consideri il sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Usando il *metodo di Richardson stazionario*

$$x^{(k+1)} = (I - \theta A)x^{(k)} + \theta b, \quad k \geq 0$$

si trovi il minimo intervallo I_θ, dei valori del parametro θ, in cui il metodo converge. (*Sugg.* $A_\theta = I - \theta A$ ha autovalori della forma $1 - \theta\lambda$ che per la convergenza dovranno essere in modulo ...) [Vale 5/30]

(b) Sia θ_m il punto medio di I_θ e sia $x_0 = (0, 1, 0)^T$. Calcolare x_2. [Vale 3/30]

Soluzione.

(a) Si osserva facilmente che la matrice di iterazione ha autovalori $\lambda_1 = 1 - 4\theta$, $\lambda_2 = 1 - 5\theta$, $\lambda_3 = 1 - 3\theta$.

Per la convergenza dobbiamo imporre che tutti e tre abbiano modulo minore di 1 che equivale a risolvere $|\lambda_n| < 1, \quad n = 1, 2, 3$ che porta alle soluzioni $0 < \theta < 1/2$, $0 < \theta < 2/5$ e $0 < \theta < 2/3$. Pertanto il più piccolo intervallo di convergenza è $0 < \theta < 2/5$.

(b) Essendo $\theta_m = 1/5$, la matrice d'iterazione diventa

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

e il termine noto

$$\begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

e

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/25 \\ 7/25 \end{pmatrix}$$

2. Data la funzione $f(x) = (1 - \sin x)(x-1)^2, \quad x \in [0, \pi]$

   (a) Calcolare analiticamente
   $$\int_0^\pi f(x)dx$$
   e fornirne il valore con 3 cifre decimali. (Sugg. procedere per parti) [Vale 5/30]

   (b) Usando la formula dell'errore della formula composita dei trapezi si stimi a priori il numero minimo di punti necessari affinchè l'errore sia minore di $\epsilon = 10^{-3}$ (Usare il fatto che $|f''| < 10.7$). [Vale 3/30]

   Soluzione. (a) La primitiva è $\frac{(x-1)^3}{3} + \cos x(x-1)^2 - 2\sin x(x-1) - 2\cos x$. L'integrale è $(\pi-1)^2 * (\pi-4)/3 - 2/3 + 4$ che con 3 cifre decimali vale 2.021.

   (b) Per stimare a priori il numero minimo di punti dobbiamo usare la formula dell'errore della formula composita dei trapezi $R_f = -\dfrac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi), \; \xi \in (a,b)$. Ora, $\max_{x \in [0,\pi]} |f''(x)| < 10.7$. Pertanto
   $$N > \sqrt{\frac{10.7\ \pi^3\ 10^3}{12}} \approx 166.3$$
   ovvero $N = 167$.

Tempo: **2.5 ore**.