Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2015-16
Prof. S. De Marchi
Padova, 11 luglio 2016

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

---

1 Domande di teoria

1. Dato l'insieme $X_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ di punti distinti dell'intervallo $[a, b]$ e i numeri reali $\{y_0, \ldots, y_n\}$, dare la definizione di *costante di Lebesgue*, Λ_n. Far vedere che

   (a) Λ_n dipende solo dalla scelta dei punti d'interpolazione [vale 2/30]

   (b) $\Lambda_n \geq 1$ [vale 2/30]

   (c) Λ_n si può interpretare come numero di condizionamento del problema d'interpolazione polinomiale [vale 4/30]

   Complessivamente [Vale 8/30]

   Risposta. Anzitutto $\Lambda_n := \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |l_{i,n}(x)|$ dove $l_{i,n}(x) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ indica l' i-esimo polinomio elementare di Lagrange di grado n.

   (a) segue dalla definizione poiché i polinomi di Lagrange dipndono dai punti d'interpolazione

   (b) $\sum_{i=0}^{n} |l_{i,n}(x)| \geq |\sum_{i=0}^{n} l_{i,n}(x)| = 1$, passando al massimo si conclude.

   (c) Detto p_n il polinomio d'interpolazione costruito sull'insieme $\{(x_i, y_i)\}$ e $\tilde{p}_n$ il polinomio d'interpolazione sui valori perturbati $\{(x_i, \tilde{y}_i)\}$, si ha

   $$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \Lambda_n \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|$$

   dove $\mathbf{y}$ e $\tilde{\mathbf{y}}$ sono i vettori dei valori y e dei valori perturbati $\tilde{y}$. Da cui si conclude appunto che Λ_n è il numero di condizionamento.

2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -3 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

e il vettore b sia scelto cosicchè la soluzione del sistema $Ax = b$ sia $x = [1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1]^T$.

Si scriva un script (cioè un codice Matlab) che costruisce la matrice `A`, il vettore `b`, definisce un vettore iniziale `x0` (qualsiasi) e una tolleranza `tol=1.e-6`, chiama la funzione `Jacobi` (la cui intestazione è qui indicata)

```
function [sol, err]=Jacobi(A,b,x0,tol)
```

e plotta il vettore degli errori in scala semilogaritmica e mette ogni tanto dei commenti [vale 7/30].

Risposta. Si tratta di costruire il seguente M-file

```
clear all; close all;

%definisco la matrice e il termine noto
A=[ 7  2  -2 0 1 ; -3  6 0 1 8 ; 0 1  5 1 -3; -5  0  0  5 11;  0 1 0 2 5];
b=A*[1,0,0,1,1]';
tol=1.e-6;
x0=zeros(4,1);

% chiamo la funzione Jacobi
[sol, err]=Jacobi(A,b,x0,tol);

%faccio il plot degli errori
semilogy(1:length(err),err,'r-.');
```

2 Esercizi

1. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcolare gli autovalori e dire se la matrice è definita positiva (arrotondare i risultati a 2 cifre decimali) [vale 4/30]

   (b) Calcolare il numero di condizionamento $\kappa_2(A)$, $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$ [vale 3/30]

   (c) Osservata la struttura della matrice, quale metodo di decomposizione della matrice A sarebbe applicabile per la soluzione del sistemi lineare $Ax = b$? Data la fattorizzazione, come si procederebbe alla soluzione del sistema lineare? [vale 2/30]

   Soluzione.

   (a) La matrice è simmetrica quindi ha autovalori reali. Disegnando i cerchi di Gerschgorin (che ora sono intervalli) si scopre che un intervallo è $[-1, 3]$ (quello relativo alla riga 3). Pertanto possiamo concludere che potrebbe non essere definita positiva. Infatti gli autovalori si calcolano guardando prima al blocco 2×2 formato dalla prima e seconda riga (e rispettive colonne) che ha autovalori 5 ed 1, quindi al blocco 3×3 formato dalla terza, quarta e quinta riga (e rispettive colonne) che ha autovalori $\frac{1-\sqrt{33}}{2} = -2.37$, $\frac{1+\sqrt{33}}{2} = 3.37$ e ancora 1. Avendo la matrice un autovalore negativo la matrice non è definita positiva.

   (b) Come osservato al precedente punto la matrice è simmetrica ma non definita positiva, pertanto $\kappa_2(A) = |\lambda_{max}|/|\lambda_{min}| = 5/1 = 5$. Inoltre $\det(A) = \prod_{i=1}^{5} \lambda_i = -40$ mentre $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = \prod_{i=1}^{5}(1/\lambda_i) = -0.025$.

   (c) La matrice è tridiagonale simmetrica ma non definita positiva, inoltre tutti i minori principali di testa sono non singolari. Possiamo applicare la fattorizzazione $A = LU$. Ottenuta detta fattorizzazzione, il sistema lineare si risolve con due sostituzioni, una in avanti risolvendo il sistema $Lz = b$ e una all'indietro risolvendo il sistema $Ux = z$.

   Se necessario si può anche applicare una matrice di permutazione P che equivale al pivoting.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sin(x + 3/2)}{\gamma}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $\gamma \neq 0$.

(i) Quante radici reali ha la funzione f nell'intervallo di riferimento? Si diano le espressioni analitiche [vale 3/20].

(ii) Mediante il metodo di Newton determinare la radice di modulo minore α_m partendo da un $x_0 < 0$. Presentare in una tabella i risultati delle iterate x_1, x_2, x_3 e degli scarti $\delta_i = |x_i - x_{i-1}|$, $i = 1, 2, 3$. Cosa si nota circa la convergenza? [vale 5/30].

(NB: fornire i risultati arrotandati a 6 cifre decimali)

Soluzione.

(i) Osserviamo che la funzione non è pari e quindi non è simmetrica nell'intervallo dato. Non solo ma il fattore γ serve solo ad aumentare o diminuire il valore ma non a cambiare le radici di f in $[-\pi, \pi]$.

Le radici si determinano osservando che $\sin(y) = 0$ quando $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Pertanto nel nostro caso $y = x + 3/2 = k\pi$ consentono di determinare 2 radici $\alpha_1 = -3/2 = -1.5000$ (che si ottiene per $k = 0$) e $\alpha_2 = \pi - 3/2 \approx 1.6416$ per $k = 1$. La radice di modulo minimo è $\alpha_m = -1.5$.

(ii) Il metodo di Newton ha funzione d'iterazione

$$g(x) = x - \frac{\sin(x + 3/2)}{\cos(x + 3/2)}\,.$$

scelgo $x_0 = -1$.

x_{k+1}	$x_1 = -1.546302$	$x_2 = -1.49997$	$x_3 = -1.500000$
$\|\delta_k\|$	$\delta_1 = 0.546302$	$\delta_2 = 0.046332$	$\delta_3 = 3.3\mathtt{e}-5$

Table 1: Tabella dei valori delle 3 iterate di Newton e degli scarti

La convergenza come da teoria risulta di ordine quadratico come si vede dalla decrescita dello scarto

Tempo: **2.0 ore**.