Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2015-16
Prof. S. De Marchi
Padova, 21 giugno 2016

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

---

1 Domande di teoria

1. Dato un metodo iterativo per la soluzione di un sistema lineare $x^{k+1} = Px^k + q$ (con P matrice d'iterazione). Si dimostri che

   (a) *"condizione necessaria per la convergenza è che esista una norma di matrice indotta per cui $\|\cdot\|$, per cui $\|P\| < 1$".*

   (b) Se vale la condizione precedente allora $\rho(P) < 1$.

   [Vale 8/30]

   Risposta. Per la prima parte la dimostrazione è semplicemente quella del Teorema 6 di p. 87 del libro di testo. Per la seconda parte basta ricordare che per la Proposizione 3, di p. 68, $\rho(P) < \|P\|$ per ogni norma compatibile.

2. Si scriva un **codice Matlab** che calcola numericamente l' integrale,

$$\int_0^\pi \frac{x}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx\,.$$

   (a) Usando la *formula trapezoidale* con $N = 10$ punti, determinare l'errore assoluto rispetto al valore "vero" ottenuto con la funzione built-in di Matlab `quadl(fun,0,pi)`, (`fun` definisce la funzione integranda definita usando `@` oppure `inline`). [Vale 5/30]

   (b) Calcolare analiticamente l'integrale dato (si calcola facilmente sostituendo e per parti!) e determinare l'errore assoluto con 4 cifre decimali usando come valore approssimato quello dato dalla formula trapezoidale del punto precendente [vale 3/30]

   Risposta. Si tratta di costruire il seguente M-file

```
clear all; close all;
fun=@(x) x/2.*cos(x/2);
esatto=quadl(fun,0,pi);
N=10;
h=pi/N; %passo h
calcolato=h*(fun(0)+2*sum(fun([2:N-1]*h))+fun(pi));
errore=abs(esatto-calcolato)
```

Sostituendo $y = x/2$ l'integrale diventa $2\int_0^{\pi/2} y\sin(y)dy$ e integrando per parti si ottiene il valore $\pi - 2$.

Sapendo che il valore dell'integrale con la formula trapezoidale data é: posto $h = \pi/10$ si ha $h/2 * (f(0) + 2 * f(\pi/10) + \cdot + 2 * f(\pi - \pi/10) + f(\pi)) \approx 1.1310$ l'errore assoluto arrotondato a 4 cifre decimali vale $|\pi - 2 - 1.1310| \approx 0.0106$.

2 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = \cos(x) + \sin(2x),\ x \in [0, \pi]$.

   (i) Si determinino i 3 polinomi elementari di Lagrange, $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ di grado 2 costruiti sui punti d'interpolazione equispaziati $\{0, \pi/2, \pi\}$ e si valutino in $x = 2$. [vale 3/30].

   (ii) Si calcoli l'errore assoluto $e_2(2) = |p_2(2) - f(2)|$, con p_2 polinomio d'interpolazione di grado 2 in forma di Lagrange. [vale 2/30]

   (iii) Si stimi l'errore d'interpolazione in $[0, \pi]$ con la formula

   $$r_2 \approx \frac{h^3}{4 \cdot 3} M_3\,,$$

   $M_3 = \max_{x \in [0,\pi]} |f^{(3)}(x)|$ (considerare $M_3 = 9$). Cosa si conclude? [vale 2/30]

   (NB: fornire i risultati sempre arrotandati a 2 cifre decimali)

   Soluzione.

   (i) $l_0(2) = \dfrac{2(2 - \pi/2)(2 - \pi)}{\pi^2} \approx -0.1$, $l_1(2) = \dfrac{8(\pi - 2)}{\pi^2} \approx 0.93$, $l_2(2) = \dfrac{4(2 - \pi/2)}{\pi^2} \approx 0.17$.

   (ii) $p_2(2) = l_0(2) f(0) + l_1(2) f(\pi/2) + l_2(2) f(\pi) \approx -0.27$. $f(2) \approx -1.17$ (il risultato che si ottiene con 2 in radianti perché nelle funzioni trigonometriche gli angoli sono sempre considerati in radianti).

   Da cui $e_2(2) \approx 0.9$.

   (iii) Essendo $h = \pi/2$ e $f^{(3)}(x) = \sin(x) - 8\cos(2x)$ il cui massimo vale $M_3 = 9$, si ottiene

   $$r_2 = (\pi/2)^3\, 9/12 \approx 2.9$$

   Possiamo concludere che con un polinomio di grado 2 non riusciamo ad approssiamare bene la funzione data.

2. Data la matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 5 & 1/3 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

   e il vettore b scelto cosicchè la soluzione del sistema $Ax = b$ sia $x = [1,\ 1,\ 1,\ 1]^T$.

   (a) La matrice è irriducibile? [vale 2/30]

(b) Dire, senza risolverlo, se il metodo di Jacobi è convergente per la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ [vale 1/30]

(c) Si consideri ora il metodo di Jacobi associato, $x^{(k+1)} = J\,x^{(k)} + q$. Partendo dalla soluzione iniziale $x^{(0)} = \mathbf{0}$ (ovvero il vettore nullo), calcolare l'errore relativo $e_2 = \frac{\|x^{(2)}-x\|}{\|x\|}$ (usare la norma 1) fornendo i risultati approssimati a 2 decimali [vale 4/30].

Soluzione.

(a) Il grafo associato è strettamente connesso

(b) La matrice è diagonalmente dominante per righe e, come visto al punto precedente irriducibile, quindi il metodo di Jacobi converge.

(c) La matrice di Jacobi è J e il termine noto q sono

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2/7 & 2/7 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & -1/10 & 0 & -1/15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 7/6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ovviamente $x^{(1)} = q$, quindi $x^{(2)} = (J + I) \cdot q = [8/7,\ 7/6,\ 11/10,\ 2/3]^T$. Quindi l'errore relativo richiesto è il rapporto $e_2 = \frac{1/7+1/6+1/10+1/3}{4} = 0.19$

Tempo: **2.0 ore**.