Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2015-16
Prof. S. De Marchi
Padova, 26 agosto 2016

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

---

1 Domande di teoria

1. Si diano le seguenti definizioni ed esempi

   (a) problema ben o mal condizionato [Vale 2/30]

   (b) metodo numerico stabile; [Vale 2/30]

   (c) con cosa si misura il condizionamento di un problema? [Vale 2/30]

   (d) si fornisca almeno un esempio di problema mal condizionato e del relativo numero di condizionamento. [Vale 2/30]

   Risposta.

   (a) Un problema si dice mal-condizionato se piccole variazioni sui dati si ripercuotono con grandi variazioni sui risultati. Altrimenti si dice ben condizionato.

   (b) Un metodo (o un algoritmo) numerico si dice stabile se consente di tenere "sotto controllo" gli errori algoritmici.

   (c) Il condizionamento si misura con il *numero di condizionamento* che indica il rapporto tra l'errore sul risultato rispetto a quello sui dati. Più piccolo è il numero di condizionamento e più semplice sarà risolvere il problema con un metodo numerico.

   (d) Un tipico esempio è la soluzione di un sistema lineare $Ax = b$ dove indichiamo con $\kappa(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ il numero di condizionamento in una qualche norma matriciale. Se A è la matricie di Vandermonde o Hilbert, sappiamo che hanno numeri di condizionamento che cresconon esponenzialmente. Un altro esempio è la *costante di Lebesgue* nel problema dell'interpolazione. In tal caso sappiamo che essa dipende dai punti ed i punti migliori per controllare la sua crescita sono quelli di Chebyshev (o anche quelli di Chebyehev-Lobatto) che hanno costante di Lebesgue a crescita logaritmica.

2. Si scriva un **codice Matlab** che calcola la soluzione di

$$\sin(x - 1/2) = 4x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

con un metodo di punto fisso convergente (facilmente individuabile dal problema!). Il codice si compone delle seguenti parti

(a) Inizializza `x0, tol, nmax`, ovvero valore iniziale, tolleranza e numero massimo d'iterazioni. Definisce la funzione d'iterazione `gfun` (usando il comando `inline`). [Vale 3/30]

(b) Fa la chiamata alla funzione `met_puntofisso`, che ha come inputs i dati definiti al punto precedente, calcola e come outputs, la soluzione `sol`, il numero d'iterazioni `iter` e il vettore degli errori `err`. [vale 2/30]

(c) Dare quindi l'istruzione per plottare il vettore degli errori. [vale 2/30]

Risposta. È facile dedurre che la funzione d'iterazione cercata è $g(x) = \sin(x - 1/2)/4$ con $g'(x) = \cos(x - 1/2)/4$ che è in modulo sempre minore di 1 in tutto l'intervallo dato. Quindi la funzione d'iterazione è convergente.

(a)
```
x0=0; tol=1.e-6; nmax=50;
gfun=inline('sin(x-1/2)/4');
```

(b)
```
[sol, niter, err]=met_puntofisso(gfun,x0,tol,nmax);
```

(c)
```
xerr=1:length(err);
plot(xerr,err);
```

2 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = x - \sqrt{x-1},\ x \in [1,3]$.

   (i) Si determini il polinomio di interpolazione di grado 2, $p_2(x)$, in *forma di Newton* costruito usando punti equispaziati. [vale 3/30]

   (ii) Si faccia il grafico di f e del polinomio p_2 e si indichi dove si avrà l'errore massimo (in modulo). [vale 3/30]

   (iii) Si calcoli l'errore assoluto $e_2(3/2) = |p_2(3/2) - f(3/2)|$. [vale 2/30]

   (NB: fornire i risultati arrotandati a 4 cifre decimali)

   Soluzione.

   (i) I punti d'interpolazione che scegliamo sono $\{1,2,3\}$. Costruiamo le differenze divise fino all'ordine 2 di f che sono
   $f[1] = f(1) = 1$; $f[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{1} = \frac{1-1}{2-1} = 0$, $f[1,2,3] = \frac{f[2,3]-f[1,2]}{3-1} = \frac{2-\sqrt{2}-0}{2} = 1 - 1/\sqrt{2}$ essendo $f[2,3] = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = 2 - \sqrt{2}$.
   Pertanto il polinomio in forma di Newton risulta

   $$p_2(x) = 1 + (1 - 1/\sqrt{2})(x-1)(x-2)\,.$$

   (ii) Il grafico della funzione e del polinomio d'interpolazione è in Fig. 1 da cui si evince che il massimo errore si ottiene grossomodo in $x^* \approx 3/2$.

   (iii) Essendo $f(3/2) = 3/2 - 1/\sqrt{2} \approx 0.7929$ e $p_2(3/2) = 1 + 1/4(1/\sqrt{2} - 1) \approx 0.9268$, allora $e_2(3/2) = |0.9268 - 0.7929| = 0.1339$

2. Data la matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   e il vettore b dato.

   (a) La matrice è invertibile? (Non calcolare A^{-1}!) [vale 2/30]

   (b) La matrice è definita positiva? [vale 1/30]

   (c) Dire, se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono convergenti per la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ [vale 2/30]

   (d) Si costruisca la matrice d'iterazione J di Jacobi e si calcoli una maggiorazione del suo raggio spettrale (autovalore di modulo massimo) $\rho(J)$ (*Sugg.* usare $\|\cdot\|_\infty$). [vale 3/30].

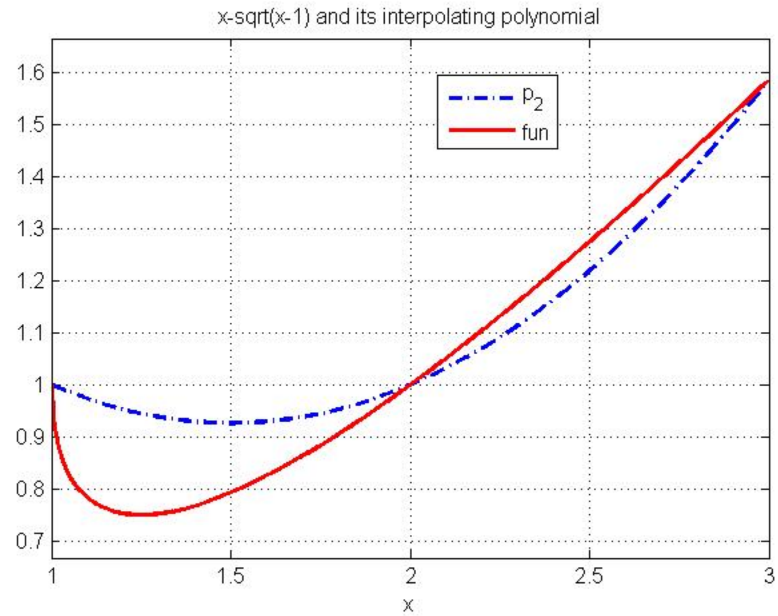

Figure 1: Grafici della funzione e del polinomio d'interpolazione

Soluzione.

(a) La matrice è simmetrica quindi ha autvalori reali e i cerchi di Gershgorin sono intervalli. Essendo diagonalmente dominante in senso stretto nessuno degli intervalli passa per l'origine quindi gli autovalori sono tutti diversi da zero e quindi $\det(A) \neq 0$.

(b) Tutti i cerchi sono centrati nel semiasse positivo. Quindi $\det(A) > 0$.

(c) La matrice è diagonalmente dominante in senso stresso per righe e colonne, quindi sia Jacobi che Gauss-Seidel convergono. Nel caso di G-S si osserva inoltre che A è simmetrica.

(d) La matrice di Jacobi è J

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2/7 & -2/7 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & -1/6 \\ -2/5 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}, \quad .$$

Sapendo che $\rho(J) < \|J\|$ per ogni norma indotta, possiamo allora considerare $\|\cdot\|_\infty$ e vedere che $\rho(J) < \max\{4/7, 1/2, 3/5, 2/3\} = 2/3$.

Tempo: **2.0 ore**.