Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2015-16
Prof. S. De Marchi
Padova, 6 febbraio 2017

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

---

1 Domande di teoria

1. Considerare il metodo di bisezione per ricerca di zeri di funzione
   (a) Il metodo converge sempre? Si giustifichi la risposta [vale 3/30].
   (b) Fissata una tolleranza ϵ, quante iterazioni saranno necessarie per calcolare la radice α? [vale 3/30] .

   Risposta.

   (a) Se ad esempio $f(a) < 0 < f(b)$ e f è una funzione continua, come dimostrato alle pagg. 36 e 37 del libro, il metodo costruisce due sequenze $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ che convergono alla radice $\alpha \in (a, b)$ monotonamente, per costruzione, da sx e dx, rispettivamente.
   (b) Detto $I_k = b_k - a_k$, assumendo che $b > a$, $|I_k| = (b-a)/2^k$. Chiedendo che $|x_k - \alpha| < \epsilon$ si ricava (vedi pag. 37 del libro)

   $$k_{min} > \log_2 \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right) - 1$$

   ovvero la parte intera del termine logaritmico.

2. Dato il polinomio di terzo grado

   $$p(x) = (x-1)^3 - (x-2)^2 + x + 4$$

   Scrivere un codice Matlab che

(a) riscrive il polinomio in forma "canonica" $p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$ e lo plotta in $[-2, 2]$, usando il comando `ezplot(p,[-2,2])` [vale 3/30];

(b) usa il comando `roots` per calcolare tutte le radici del polinomio [vale 1/30];

(c) riscrive il polinomio nella forma di funzione $p = @(x)$... e usando la funzione `fzero` calcola la radice reale; [vale 1/30]

(d) detti $a_0, \ldots, a_3$ i coefficienti di p, costruire la *matrice compagna* C di dimensione 3×3

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

e calcolarne gli autovalori con `eig` [vale 3/30].

Risposta.

(a) Il polinomio in forma canonica (che si ottiene sviluppando i calcoli) è $p(x) = -1 + 8x - 4x^2 + x^3$, con coefficienti $a_0 = -1, a_1 = 8, a_2 = -4, a_3 = 1$. Pertanto per rispondere ad (a) basta scrivere

```
p=@(x) -1+8*x-4*x.^2+x.^3;
ezplot(p,[-2,2]);
```

(b) Qui basta introdurre l'array dei coefficienti `a=[-1 8 -4 1];`
e dare il comando `roots(a)`

(c) `fzero(p,-1)`

(d) Ricordando che in Matlab gli indici partono da 1, usando il vettore `a` precedentemente definito

```
C=[0 1 0; 0 0 1; -a(1) -a(2) -a(3)];
eig(C)
```

si scoprirà che gli autovalori sono le radici del polinomio p.

2 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = x - 2\sqrt{x-1},\ x \in [1,3]$.
   (i) La funzione nell'intervallo $[1,3]$ ha un'unica radice reale, α. Perchè? [vale 2/30]
   (ii) Si costruisca un metodo iterativo convergente alla radice. [vale 3/30]
   (iii) Partendo da $x_0 = 5/3$ si determini x_2 con il metodo iterativo. Quanto vale l'errore assoluto $e_2 = |x_2 - \alpha|$? [vale 3/30]

   (NB: fornire i risultati arrotandati a 4 cifre decimali)

   Soluzione.
   (i) Infatti risolvendo $f(x) = 0$ si perviene alla scrittura $(x-2)^2 = 0$, ovvero $\alpha = 2$ è l'unica radice doppia della funzione data. L'unicità della radice si ottiene anche calcolando le derivate prima e seconda, verificando che in $\alpha = 2$ c'è un punto di minimo.
   (ii) Il metodo di Newton modificato sappiamo essere convergente quadraticamente alla radice in un suo intorno. Il metodo di Newton modificato per una radice doppia è

   $$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

   e nel nostro caso diventa

   $$x_{k+1} = x_k - 2\frac{x_k - 2\sqrt{x_k - 1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x_k - 1}}}$$

   ovvero

   $$x_{k+1} = \frac{3x_k - x_k\sqrt{x_k - 1} - 4}{\sqrt{x_k - 1} - 1}\,.$$

   (iii) Partendo da $x_0 = 5/3$ si ha $x_1 = 1.9663$ e $x_2 = 1.9997$. Pertanto $e_2 = 3e-4$.

2. Data la matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

   (a) La matrice è invertibile? (Non calcolare A^{-1}!) [vale 2/30]
   (b) Si dica perchè $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$ (senza calcolare le norme). Si calcoli quindi una delle norme. [vale 2/30]

(c) La norma di Frobenius è $\|A\|_F = \sqrt{\mathtt{tr}(A \cdot A^T)}$. Nel nostro caso quanto vale detta norma? [vale 2/30]

(d) Essendo poi $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot A^T)}$ quanto vale teoricamente $\|A\|_2$? [vale 1/30]

(e) Si ordinino le norme trovate.[vale 1/30]

Soluzione.

(a) La matrice è simmetrica quindi ha autvalori reali e i cerchi di Gershgorin sono intervalli. Essendo diagonalmente dominante in senso stretto nessuno degli intervalli passa per l'origine quindi gli autovalori sono tutti diversi da zero e quindi $\det(A) \neq 0$.

(b) La matrice è simmetrica quindi $\|A\|_1$ (norma per colonne) e $\|A\|_\infty$ (norma per righe) risultano uguali. $\|A\|_1 = 9$.

(c) Come osservato la matrice è simmetrica quindi per calcolare la traccia di $A \cdot A^T$ basta fare la somma delle righe moltiplicate per sè stesse, ottenendo $\|A\|_F = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$.

(d) Essendo $A = A^T$ si ha $\|A\|_2 = \rho(A)$ (l'osservazione è fatta anche a pag. 67 del testo).

(e) Dalla teoria sappiamo che $\rho(A) \leq \|A\|$. Nel nostro caso $\rho(A) \leq \|A\|_1 < \|A\|_F$.

Tempo: **2.0 ore**.