Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2016-17
Prof. S. De Marchi
Padova, 14 luglio 2017

NOTA BENE.

- Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola.
- Non si possono usare manuali, libri e appunti.
- Spegnere i celluari e deporli sul banco.
- **Si può usare la calcolatrice.**

---

1 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x+1} - 2\sin(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad x \in [0, \pi]$.

   (i) Facendo il grafico di f_1 vs f_2, verificare che f ha due zeri, ξ_1, ξ_2 nell'intervallo $[0, \pi]$ individuandone gli intervalli separatori I_{ξ_1} di ampiezza pari a 0.2 ed I_{ξ_2} di ampiezza 0.1. [vale 3/30]

   (ii) Qual é la condizione necessaria e sufficiente affinché un metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$ sia convergente? Si determini un metodo di punto fisso convergente allo zero ξ_1 di f in $[0, \pi]$ spiegando perché risulta convergente. [vale 5/30]

   (iii) Si calcoli quindi un'approssimazione di ξ_1 scegliendo x_0 uguale all'estremo sinistro dell'intervallo separatore I_{ξ_1}. Si determini l'iterata x_3 e il valore $f(x_3)$. [vale 4/30]

   (iv) Infine, approssimare ξ_2 con il metodo di Newton calcolando ancora x_3 prendendo sempre x_0 uguale all'estremo sinistro dell'intervallo separatore I_{ξ_2} e valutare $f(x_3)$. [vale 3/30]

   (NB: fornire i risultati arrotandati a 4 cifre decimali)

2. Si consideri la tabella dei valori (x, y)

x	1	3/2	2	3	5
y	1	3	2	2	5

Table 1: valori (x,y)

(i) Si costruisca il polinomio di primo grado generato dalla base $\{1, 1-x\}$, ovvero $p_1(x) = a_1 + a_2(1-x)$, che approssima nel senso dei minimi quadrati i valori dati (*Sugg.* costruire e risolvere il sistema delle equazione normali). [vale 5/30]

(ii) Calcolare col metodo di trapezi (semplice) l'area individuata dal trapezio avente per lato obliquo la retta $p_1(x)$ (Nota: qui il passo $h = b - a$) [vale 2/30]

(iii) Calcolare col metodo dei *trapezi composito* l'area usando i valori della tabella Tab 1. (Nota: qui il passo varia ad ogni sottointervallo) [vale 4/30]

(iv) Infine calcolare col metodo di Simpson (semplice), l'area individuata dalla cubica $p_3(x) = (p_1(x) - 3/5)^3$ (Nota: qui il passo $h = (b-a)/2$). Cosa si puó osservare? [vale 4/30]

Tempo: **2.0 ore**.

Soluzioni.

1. (i) Il grafico di $f(x)$ é equivalente al plot di $\sqrt{(x+1)/2}$ vs $\sin(x)$ come in Fig. 1.

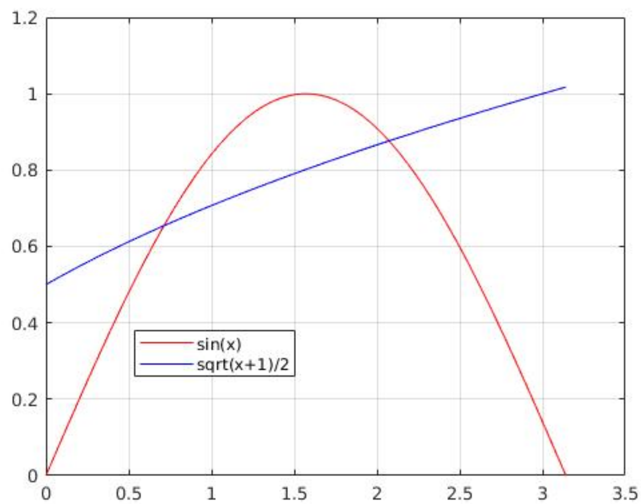

Figure 1: plot di $\sqrt{x+1}/2$ vs $\sin(x)$

Gli zeri e gli intervalli separatori sono $\xi_1 \in I_{\xi_1} = [0.6, 0.8]$ e $\xi_2 \in I_{\xi_2} = [2, 2.1]$

(ii) La condizione necessaria e sufficiente affinché metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$ sia convergente é che $|g'(x)| < 1, \ \forall\, x \in I_\alpha$.

Prendendo la funzione $g(x) = \arcsin(\frac{\sqrt{x+1}}{2})$ si verifica facilmente che $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{(x+1)(5-x)}}$ che é sempre positiva e minore di 1 in tutto $[0, \pi]$. Quindi il metodo iterativo che ha come funzione d'iterazione questa g risulterá convergente.

$x_0 = 0.6; x_1 = 0.6847; x_2 = 0.7062; x_3 = 0.7117$ con $f(x_3) = 2.1e-3$.

(iv) L'iterazione di Newton é $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ ovvero

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{\sqrt{x_k+1}}{2} - \sin(x_k)}{\frac{1}{4\sqrt{x_k+1}} - \cos(x_k)}$$

Pertanto partendo da $x_0 = 2$ otteniamo $x1 = 2.0772; x_2 = 2.0731; x_3 = 2.0730$. Infine $f(x_3) = -5.0436e-5$.

2. (i) Dobbiamo costruire dapprima la matrice

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Il sistema delle equationi normali é

$$V^T V \mathbf{a} = V^T \mathbf{y}$$

con $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ vettore dei coefficienti da determinare e $\mathbf{y}$ il vettore dei valori dati. Ora

$$A = V^T V = \begin{bmatrix} 5 & -15/2 \\ -15/2 & 85/4 \end{bmatrix}, \quad c = V^T y = \begin{bmatrix} 13 \\ -55/2 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema 2×2 si ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (7/5, -4/5)$ ottendo $p_1(x) = 7/5 - 4/5(1-x)$.

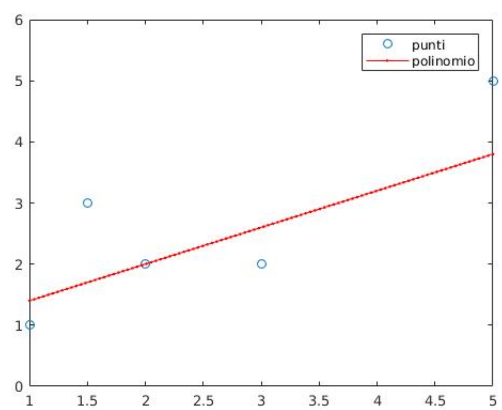

Figure 2: punti e polinomio approssimante

(ii) Basta osservare che gli estremi da integrare sono $[a, b] = [1, 5]$ e il polinomio vale $p_1(1) = 7/5,\ p_1(5) = 23/5$. Quindi

$$I = (b - a)/2 * (p_1(a) + p_1(b)) = 2 * (7/5 + 23/5) = 12\,.$$

(iii) Basta applicare 4 volte il metodo dei trapezi, ovvero

$$I = (x_2 - x_1)/2*(y_1 + y_2) + (x_3 - x_2)/2*(y_2 + y_3) + (x_4 - x_3)/2*(y_3 + y_4) + (x_5 - x_4)/2*(y_4 + y_5)$$

da cui si ottiene

$$I = 0.5/2 * 4 + 0.5/2 * 5 + 1/2 * 4 + 1 * 7 = 11.25\,.$$

(iii) Si vede immediatamente che $p_1(x) = 3/5+4/5x$ pertanto la cubica $p_3(x) = 64/125\, x^3$. La formula di Simpson e' inutile poiché sappiamo che Simpson é esatta per polinomi cubici. Quindi l'integrale richiesto é $\int_1^5 p_3(x)dx = 16/125 * (5^4 - 1) = 79.872$ Comunque si ottiene lo stesso risultato con Simpson

$$\begin{aligned} I = (b - a)/6\,(f(a) + 4f((a + b)/2) + f(b)) \\ = 4/6\,(64/125 + 4(64/125) * 27 + 64/125 * 125) \\ = 4/6 * 64/125 * (1 + 27 * 4 + 125) \\ = 79.872 \end{aligned}$$

come volevasi.