Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2016-17
Prof. S. De Marchi
Padova, 14 settembre 2017

NOTA BENE.

- Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola.
- Non si possono usare manuali, libri e appunti.
- Spegnere i celluari e deporli sul banco.
- **Si può usare la calcolatrice.**

---

1 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1}/x, \quad x \in [1/2, 3/2]$.

   (i) Si determini il polinomio di interpolazione di grado 2, $p_2(x)$, in *forma di Newton* costruito usando punti equispaziati. Fare anche un grafico approssimativo della funzione f e del polinomio $p_2(x)$. Indicativamente in quale punto dell'intervallo si avrá l'errore assoluto massimo? (arrontondare le differenze divise a 2 decimali) [vale 5/30]

   (ii) Si calcoli l'errore assoluto $e(0.7) = |p_2(0.7) - f(0.7)|$. [vale 2/30]

   (iii) Si consideri ora la retta $r(x)$ che passa per i punti $(1/2, f(1/2))$ e $(3/2, f(3/2))$. Si determini $e_m = |r(0.7) - p_2(0.7)|$ e anche $e_1 = |r(1) - f(1)|$. Perchè quest'ultimo errore risulta cosi' grande? [vale 7/30]

   (NB: fornire i risultati arrotandati a 2 cifre decimali)

2. Data la matrice tridiagonale `A`, 6×6, avente per diagonale principale il vettore `v=[4 5 6 7 8 9]` e diagonali superiori e inferiori uguali al vettore `v1=[1 2 -2 2 -2]`.

   (a) La matrice è invertibile? *Sugg.* non è necessario calcolare $\det(A)$! [vale 3/30]

   (b) Se si usasse invece il vettore `v1=[2 -2 2 -2 -1]`, la matrice risulterebbe ancora invertibile? [vale 2/30]

   (c) Si costruisca la matrice d'iterazione J di Jacobi e si calcoli una maggiorazione del suo raggio spettrale $\rho(J)$ (autovalore di modulo massimo) usando $\|\cdot\|_\infty$. [vale 5/30].

(d) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con `b=A*ones(6,1)`. Scelta la tolleranza $\epsilon = 10^{-8}$ e la soluzione iniziale `x0=[0 0 0 0 0 0]'`, usando la formula

$$\|J\|^k \|x^2 - x^1\| \leq \epsilon(1 - \|J\|) \tag{1}$$

dove x^2 ed x^1 indicano la seconda e la prima iterata rispettivamente, si determini il numero di iterazioni k necessarie ad approssimare la soluzione del sistema a meno di ϵ (come $\|\cdot\|$ usare la stessa norma vettoriale e matriciale indotta usata al punto precedente) [vale 6/30].

NB: in questo esercizio fare i calcoli usando i numeri frazionari ed eventualmente fare gli arrotondamenti (a 4 cifre) solo alla fine.

Soluzione Esercizio 1.

(i) I punti d'interpolazione che scegliamo sono $\{1/2, 1, 3/2\}$. Costruiamo le differenze divise fino all'ordine 2 di f che sono
$f[1/2] = f(1/2) = \sqrt{5} \approx 2.24$; $f[1/2, 1] = \frac{f(1)-f(1/2)}{1/2} = 2(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \approx -1.64$,
$f[1/2, 1, 3/2] = \frac{f[1,3/2]-f[1/2,1]}{1} == 2\sqrt{13}/3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{5} \approx 1.22$
Pertanto il polinomio in forma di Newton risulta

$$p_2(x) = \sqrt{5} + 2(\sqrt{2} - \sqrt{5})(x - 1/2) + 2\sqrt{13}/3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{5}(x - 1/2)(x - 1)\,.$$

(ii) Il grafico della funzione e del polinomio d'interpolazione è in Fig. 1 da cui si evince

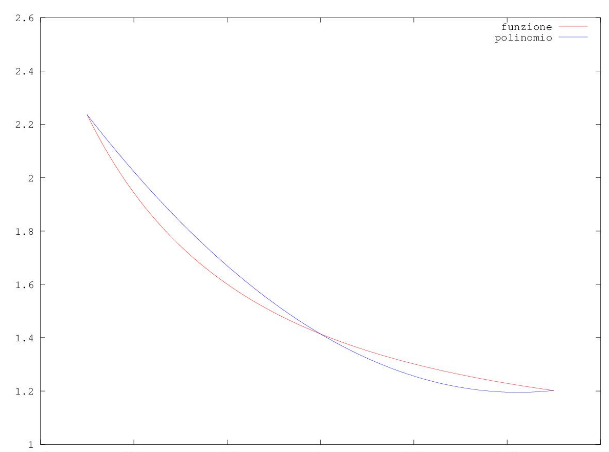

Figure 1: Grafici della funzione e del polinomio d'interpolazione

che il massimo errore si ottiene grossomodo in $x^* \approx 0.7$.
L' errore richiesto è $e(0.7) = |p_2(0.7) - f(0.7)| = |1.83 - 1.74| \approx 0.09$

(iii) La retta per i punti richiesti è

$$\frac{x-1/2}{1} = \frac{y-\sqrt{5}}{\sqrt{13}/3-\sqrt{5}}$$

da cui $r(x) = (x-1/2)(\sqrt{13}/3-\sqrt{5})+\sqrt{5}$. Quindi $r(0.7) \approx 2.03$. Da cui $e_m = |2.03-1.83| = 0.2 > e_2 = 0.09$. Ovvero l'interpolante lineare è meno precisa di quella quadratica. Inoltre $e_1 = |r(1)-f(1)| = |1.72-1.41| = 0.31$. L'errore e' il punto in cui la retta r dista maggiormente dalla curva $f(x)$, $x \in [0.5, 1.5]$.

Soluzione Esercizio 2.

(a) La matrice è tridiagonale simmetrica e diagonalmente dominante in senso stretto. Dal teorema LU, si puó applicare la fattorizzazione LU di A senza pivoting ottenendo la matrice L che avrá tutti 1 sulla diagonale. Quindi $det(A) = det(L)\,det(U) = 1 \cdot det(U) \neq 0$ perché $u_{ii} \neq 0\,, \forall i$.
In alternativa, sappiamo pure che se A è simmetrica e diagonalmente dominante in senso stretto, tutti gli autovalori sono positivi e quindi il determinante è positivo, in particolare la matrice risulta invertibile.
Per chi sa cosa sono i *cerchi di Gerschgorin*, nel caso di matrici simmetriche, risultano dei segmenti sul semiasse positivo reale che non toccano mai l'origine (la matrice è simmetrica quindi ha autovalori reali!). Pertanto tutti gli autovalori sono positivi e quindi il determinante > 0 e di conseguenza la matrice è invertibile.

(b) Si' poiché la matrice rimane simmetrica strettamente diagonalmente dominante.

(c) La matrice è diagonalmente dominante in senso stresso per righe e colonne, quindi Jacobi sappiamo che converge.

- Usiamo il vettore `v1` del punto (a). Si ottiene

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & -2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/7 & 0 & -2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/9 & 0 \end{bmatrix}, \quad .$$

  Sapendo che $\rho(J) < \|J\|$ per ogni norma indotta, possiamo allora considerare $\|\cdot\|_\infty$ e vedere che $\rho(J) < \|J\|_\infty = \max\{1/4, 3/5, 2/3, 4/7, 1/2, 2/9\} = 2/3 < 1$.

- Se invece usiamo il vettore `v1` del punto (b) la matrice di Jacobi è J

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/5 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/7 & 0 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \end{bmatrix}, \quad .$$

Sapendo che $\rho(J) < \|J\|$ per ogni norma indotta, possiamo allora considerare $\|\cdot\|_\infty$ e vedere che $\rho(J) < \|J\|_\infty = \max\{1/2, 4/5, 2/3, 4/7, 3/8, 1/9\} = 4/5 < 1$.

(d) – Usando il vettore `v1` del punto (a) Ora $b = (5, 8, 6, 7, 8, 7)^T$, quindi $q = D^{-1}b$ con $D = \texttt{diag}(A)$ risulta essere $q = (5/4, 8/5, 1, 1, 1, 7/9)^T$. Allora $x^1 = Jx^0 + q = q$ ed $x^2 = Jq + q = (17/20, 19/20, 4/5, 1, 17/18, 1)^T$ Quindi $\|x^2 - x^1\|_\infty = \max\{2/5, 13/20, 1/5, 0, 1/18, 2/9\} = 13/20$. Quindi dovremo risolvere

$$(2/3)^k(13/20) < 10^{-8}(1 - 2/3)$$

da cui

$$k = \lfloor \frac{\log(20/39 \cdot 10^{-8})}{\log(2/3)} \rfloor = 48\,.$$

– Usando invece il vettore `v1` del punto (b), $b = (6, 5, 6, 7, 5, 8)^T$, risulta essere $q = (3/2, 1, 1, 1, 5/8, 8/9)^T$, $x^1 = Jx^0 + q = q$, $x^2 = Jq + q = (1, 4/5, 1, , 25/28, 71/72, 69/72)^T$ $\|x^2 - x^1\|_\infty = \max\{1/2, 1/5, 0, 3/28, 26/72, 5/72\} = 1/2$ e risolvere

$$(4/5)^k(1/2) < 10^{-8}(1 - 4/5)$$

da cui

$$k = \lfloor \frac{\log(2/5 \cdot 10^{-8})}{\log(4/5)} \rfloor = 87\,,$$

con convergenza quindi molto più lenta, essendo la norma (e di conseguenza il raggio spettrale) di J più vicino ad 1.

Tempo: **2.0 ore**.