Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2016-17
Prof. S. De Marchi
Padova, 29 giugno 2017

NOTA BENE.

- Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola.
- Non si possono usare manuali, libri e appunti.
- Spegnere i celluari e deporli sul banco.
- **Si può usare la calcolatrice.**

---

1 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x, \quad x \in [1,3]$.

   (i) Si determini il polinomio di interpolazione di grado 2, $p_2(x)$, in *forma di Newton* costruito usando punti equispaziati. Fare anche un grafico approssimativo della funzione f e del polinomio $p_2(x)$. Indicativamente in quale punto dell'intervallo si avrá l'errore assoluto massimo? [vale 5/30]

   (ii) Si calcoli l'errore assoluto $e_2(1.4) = |p_2(1.4) - f(1.4)|$. [vale 2/30]

   (iii) Usando la maggiorazione dell'errore d'interpolazione nel caso di punti equispaziati

   $$\max_{x\in[a,b]} |e_n(x)| \le \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \tag{1}$$

   si fornisca una stima dell'errore d'interpolazione. Di quanto differisce rispetto al valore calcolato al punto precedente? [vale 7/30]

   (NB: fornire i risultati arrotandati a 4 cifre decimali)

   Soluzione.

   (i) I punti d'interpolazione che scegliamo sono $\{1,2,3\}$. Costruiamo le differenze divise fino all'ordine 2 di f che sono
   $f[1] = f(1) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$; $f[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{1} = \sqrt{5} - \sqrt{2} - 1 \approx -0.1781$,
   $f[1,2,3] = \frac{f[2,3]-f[1,2]}{3-1} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}-1-(\sqrt{5}-\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{\sqrt{10}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} \approx 0.0522$
   Pertanto il polinomio in forma di Newton risulta

   $$p_2(x) = \sqrt{2} - 1 + (\sqrt{5} - \sqrt{2} - 1)(x-1) + \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}(x-1)(x-2)\,.$$

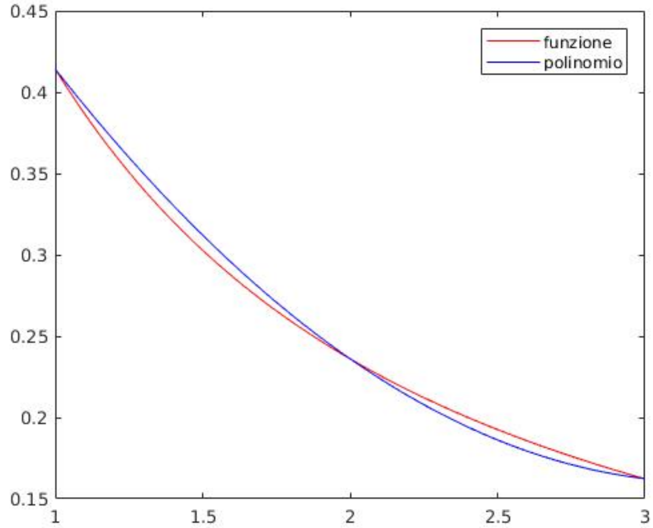

Figure 1: Grafici della funzione e del polinomio d'interpolazione

(ii) Il grafico della funzione e del polinomio d'interpolazione è in Fig. 1 da cui si evince che il massimo errore si ottiene grossomodo in $x^* \approx 1.38$.
L' errore richiesto e' $e_2(1.4) = |p_2(1.4) - f(1.4)| \approx 0.01$

(iii) Nel nostro caso $n+1 = 3$. Dobbiamo calcolare la derivata terza di f. Ora $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}} - 1$, $f^{(2)}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$ e

$$f^{(3)}(x) = -\frac{3x}{(x^2+1)^{5/2}}$$

Come si vede la derivata terza è sempre negativa e crescente in $[1, 3]$, con $|f^{(3)}(1)| \approx 0.53$ e $|f^{(3)}(3)| \approx 0.03$. Il massimo modulo richiesto sarà in $x = 1$. Da cui , essendo $h = 1$ la maggiorazione richiesta in (1) é

$$\max_{x\in[1,3]} |e_2(x)| \leq \frac{1}{12}|f^{(3)}(1)| \approx 0.04$$

che risulta essere 4 volte il valore valore calcolato (ii).

2. Data la matrice tridiagonale `A`, 5×5, avente per diagonale principale il vettore `v=[5 6 7 8 9]` e diagonali superiori e inferiori uguali al vettore `v1=[2 -2 2 -2]`.

   (a) La matrice è invertibile? *Sugg.* non si deve calcolare $\det(A)$! [vale 3/30]

   (b) Se si usasse il vettore `v1=[-2 2 -2 2]`, la matrice risulterebbe ancora invertibile? [vale 2/30]

(c) Si costruisca la matrice d'iterazione J di Jacobi e si calcoli una maggiorazione del suo raggio spettrale (autovalore di modulo massimo) $\rho(J)$. [vale 5/30].

(d) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con `b=A*ones(5,1)`. Scelta la tolleranza $\epsilon = 10^{-8}$ e la soluzione iniziale `x0=[0 0 0 0 1]'`, usando la formula

$$\|J\|^k \|x^2 - x^1\| \leq \epsilon(1 - \|J\|) \qquad (2)$$

dove x^2 ed x^1 indicano la seconda e la prima iterata rispettivamente, si determini il numero di iterazioni k necessarie ad approssimare la soluzione del sistema a meno di ϵ (come $\|\cdot\|$ usare la stessa norma vettoriale e matriciale indotta usata al punto precedente) [vale 6/30].

NB: in questo esercizio fare i calcoli usando i numeri frazionari e fare gli arrotondamenti (a 4 cifre) solo alla fine.

Soluzione.

(a) La matrice è tridiagonale simmetrica e diagonalmente dominante in senso stretto. Dal teorema LU, si puó applicare la fattorizzazione LU di A senza pivoting ottenendo la matrice L che avrá tutti 1 sulla diagonale. Quindi $det(A) = det(L)\, det(U) = 1 \cdot det(U) \neq 0$ perché $u_{ii} \neq 0\,, \forall i$.

In alternativa, sappiamo pure che se A è simmetrica e diagonalmente dominante in senso stretto, tutti gli autovalori sono positivi e quindi il determinante è positivo, in particolare la matrice risulta invertibile.

Per chi sa cosa sono i *cerchi di Gerschgorin*, essi sono dei segmenti sul semiasse positivo reale che non toccano mai l'origine (la matrice è simmetrica quindi ha autovalori reali!). Pertanto tutti gli autovalori sono positivi e quindi il determinante > 0 e la matrice invertibile.

(b) Si' poiché la matrice rimane simmetrica strettamente diagonalmente dominante

(c) La matrice è diagonalmente dominante in senso stresso per righe e colonne, quindi Jacobi sappiamo che converge. La matrice di Jacobi è J

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/7 & 0 & -2/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 & 0 \end{bmatrix}, \quad .$$

Sapendo che $\rho(J) < \|J\|$ per ogni norma indotta, possiamo allora considerare $\|\cdot\|_\infty$ e vedere che $\rho(J) < \|J\|_\infty = \max\{2/5, 2/3, 4/7, 1/2, 2/9\} = 2/3 < 1$.

(d) Ora $b = (7, 6, 7, 8, 7)^T$, quindi $q = D^{-1}b$ con $D = diag(A)$ risulta essere $q = (7/5, 1, 1, 1, 7/9)^T$. Allora $x^1 = Jx^0 + q = (7/5, 1, 1, 5/4, 7/9)^T$ ed $x^2 = Jx^1 + q =$

$(1, 13/15, 26/28, 34/36, 38/36)^T$ Quindi $\|x^2 - x^1\|_\infty = \max\{2/5, 2/15, 2/28, 4/9, 5/18\} = 2/5$. Quindi dovremo risolvere

$$(2/3)^k (2/5) < 10^{-8}(1 - 2/3)$$

da cui

$$k = \lfloor \frac{\log(5/6 \cdot 10^{-8})}{\log(2/3)} \rfloor = 46\,.$$