Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2016-17
Prof. S. De Marchi
Padova, 9 febbraio 2018

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

---

1 Esercizi

1. Data la funzione $f(x) = 3\sin(x-\alpha),\ x \in [-\pi, \pi],\ \alpha > 0$

   (i) Quante radici reali ha la funzione f nell'intervallo di riferimento? Si diano le espressioni analitiche [vale 6/20].

   (ii) Si consideri ora $\alpha = 1/2$. Mediante il *metodo di Newton* determinare la radice di modulo maggiore ξ_M e presentare in una tabella i risultati delle iterate x_0, x_1, x_2, x_3 e degli errori assoluti relativi $e_i = |x_i - \xi_M|$. Cosa si nota circa la convergenza? [vale 9/30].

   (NB: fornire i risultati arrotandati a 4 cifre decimali)

   Soluzione.

   (i) Le radici si determinano chiedendo che $\sin(y) = 0$ quando $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Pertanto nel nostro caso $x = \alpha + k\pi$ consentono di determinare 2 radici $\xi_1 = \alpha$ (che si ottiene per $k = 0$) e $\xi_2 = \alpha - \pi$ per $k = -1$.

   (ii) Con $\alpha = 1/2$ $\xi_2 \approx -2.6416$ che è anche quella di modulo maggiore, ξ_M. Il metodo di Newton ha la funzione d'iterazione

$$g(x) = x - \frac{\sin(x-1/2)}{\cos(x-1/2)}\,.$$

x_{k+1}	$x_0 = -2.8$	$x_1 = -2.6403$	$x_2 = -2.6416$	$x_3 = -2.6416$
$\lvert e_k\rvert$	$\lvert e_0\rvert = 0.16$	$\lvert e_1\rvert = 1.2e-3$	$\lvert e_2\rvert = 9.3e-5$	$\lvert e_2\rvert = 9.3e-5$

Table 1: Tabella dei valori delle 3 iterate di Newton e degli errori assoluti

Dagli errori si nota una convergenza di tipo quadratico, come ci aspettavamo.

---

2. Data la funzione $f(x) = \cos(x) + 2\sin(x),\ x \in [0, \pi]$.

   (i) Si determinino i 3 polinomi elementari di Lagrange, $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ di grado 2 costruiti sui punti d'interpolazione equispaziati $\{0, \pi/2, \pi\}$ e si valutino in $x = 1$. [vale 6/30].

   (ii) Si calcoli l'errore assoluto $e_2(1) = |p_2(1) - f(1)|$, con p_2 polinomio d'interpolazione di grado 2 in forma di Lagrange. [vale 2/30]

   (iii) Si stimi l'errore d'interpolazione in $[0, \pi]$ con la formula

   $$r_n = \frac{h^{n+1}}{4 \cdot (n+1)} \max_{x \in [0,\pi]} |f^{(n+1)}(x)|\,,$$

   con $h = \pi/2$ ed $n = 2$ [vale 7/30] .

   (NB: fornire i risultati sempre arrotandati a 2 cifre decimali)

   Soluzione.

   (i) $l_0(1) = \dfrac{(1-\pi/2)(1-\pi)2}{\pi^2} \approx 0.25$, $l_1(1) = \dfrac{4(\pi - 1)}{\pi^2} \approx 0.87$, $l_2(1) = \dfrac{2(1-\pi/2)}{\pi^2} \approx -0.12$.

   (ii) $p_2(1) = l_0(1)f(0) + l_1(1)f(\pi/2) + l_2(1)f(\pi) \approx 2.11$. $f(1) \approx 2.22$. Da cui $e_2(1) \approx 0.11$.

   (iii) Essendo $h = \pi/2$ e $f^{(3)}(x) = \sin(x) - 2\cos(x)$ il cui massimo, assunto in $\alpha \approx 2.7$ vale ≈ 2.2, si ottiene

   $$r_2 = \frac{(\pi/2)^3\ 2.2}{12} \approx 0.71$$

   che in effetti é una sovrastima.

Tempo: **2.0 ore**.