Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2017-18
Prof. S. De Marchi, Dott.ssa E. Perracchione
Padova, 15 giugno 2018

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

---

1 Esercizi

1. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) La matrice A è definita positiva? Calcolare gli autovalori, arrotondandone i risultati a 2 cifre decimali [vale 4/30]

   (b) Si consideri ora la matrice A_α ottenuta dalla matrice A ponendo $A_{4,5} = \alpha$, $\alpha \geq 0$. Per quali valori di $\alpha \geq 0$ la matrice risulta essere definita positiva? [vale 4/30]

   (c) Si determini $\|A_{0.5}\|_1$. Poi si determini $\|A_{0.5}^{-1}\|$ e quindi $\kappa_1(A_{0.5})$ *Sugg.*: per calcolare $A_{0.5}^{-1}$ ragionare come per il calcolo degli autovalori [vale 5/30]

   (d) Considerata la struttura della matrice A_α (con α per cui gli autovalori sono diversi da zero) , quale metodo di fattorizzazione della matrice A_α sarebbe applicabile per la soluzione del sistema lineare `Ax=b`? Siano B e C le matrici della fattorizzazione: come si procederebbe alla soluzione del sistema lineare? [vale 2/30]

Soluzione.

(a) La matrice è simmetrica quindi ha autovalori reali. Disegnando i cerchi di Gerschgorin (che ora sono intervalli) si scopre che un intervallo è $[-1, 3]$ (quello relativo alla riga 5). Pertanto possiamo concludere che potrebbe non essere definita positiva. Infatti gli autovalori si calcolano guardando prima al blocco 3×3 formato dalle prime tre righe e colonne che ha autovalori $5, 2, 1$, quindi al blocco 2×2 formato dalla quarta e quinta riga (e rispettive colonne) che ha autovalori (arrotondati a 2 decimali) $\frac{3-\sqrt{17}}{2} = -0.56, \frac{3+\sqrt{17}}{2} = 3.56$.

Avendo la matrice un autovalore negativo la matrice non è definita positiva.

(b) Gli autovalori del primo blocco rimangono inalterati. Cambiano solo quello del blocco 2×2 che saranno le soluzioni dell'equazione $\lambda^2 - 3\lambda + 2(1-\alpha) = 0$. Il discriminante è $3 \pm \sqrt{1+8\alpha}$. Essendo $\alpha \geq 0$ per rispondere basta chiederci quando $3 - \sqrt{1+8\alpha} > 0$. Se e solo se $\alpha < 1$. Quindi l'intervallo richiesto è $\alpha \in [0, 1)$.

(c) $\|A_{0.5}\|_1 = 5$.

$$A_{0.5}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Pertanto $\|A_{0.5}^{-1}\|_1 = 3$ e quindi $\kappa_1(A_{0.5}) = 15$.

(d) La matrice è tridiagonale non simmetrica con autovalori tutti positivi e con tutti i minori principali di testa non singolari. Possiamo applicare la fattorizzazione $A = LU$, cosicché avremo $B = L$ ed $C = U$. Ottenuta detta fattorizzazzione, il sistema lineare si risolve con due sostituzioni, risolvendo dapprima il sistema $Lz = b$ e poi il sistema $Ux = z$.

Se necessario si può anche applicare una matrice di permutazione P che equivale al pivoting.

2. Data la funzione $f(x) = \mathsf{e}^{x/2} - x^2,\ x \in [-2, 2]$.

(i) Fare il grafico e dedurre quante radici reali ha la funzione f nell'intervallo $[-2, 2]$. Si indichino inoltre gli intervalli separatori di ampiezza unitaria. [vale 4/20].

(ii) Mediante il metodo di Newton determinare la radice di modulo minore ξ_m partendo da $x_0 = 0$. Presentare in una tabella i risultati delle iterate x_1, x_2, x_3, x_4 e degli scarti $\delta_i = |x_i - x_{i-1}|,\ i = 1, 2, 3, 4$. Cosa si nota circa la convergenza? [vale 5/30].

(iii) Indicata invece con ξ_M la radice di modulo maggiore, determinare un metodo d'iterazione di punto fisso convergente. Come al punto (ii) partendo da $x_0 = 1$ calcolare x_i, δ_i con $i = 1, ..., 4$ [vale 6/30]

(NB: fornire i risultati arrotandati a 4 cifre decimali)

Soluzione.

(i) Osserviamo che la funzione non è pari e non è simmetrica nell'intervallo dato. Il problema equivale a trovare le intersezione di x^2 con $e^{x/2}$. Sono entrambe funzioni positive in [-2,2]. Inoltre $e^{-1} < 4$ e $e < 4$ quindi ci sono 2 radici in $\xi_1 \in [-1, 0]$ e $\xi_2 \in [1, 2]$.

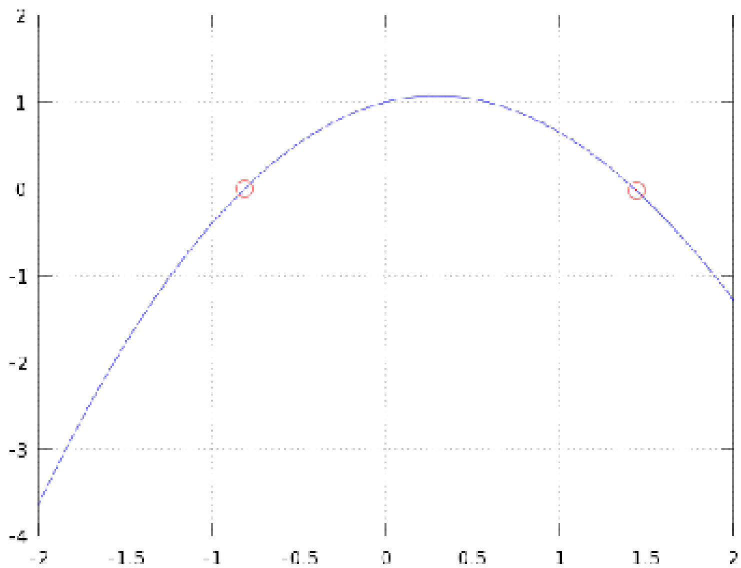

Figure 1: grafico della funzione f

(ii) Il metodo di Newton ha funzione d'iterazione

$$g(x) = x - \frac{2(\exp(x/2) - x^2)}{\exp(x/2) - 4x}.$$

Essendo $x_0 = 0$.

La convergenza come da teoria risulta di ordine quadratico come si vede dalla decrescita dello scarto. Si osservi che partendo da $x_0 = 0$ sono soddisfatte le condizioni di convergenza globale del metodo di Newton. Già partendo da $x_0 = 0.1$ il metodo non convergerebbe quadraticamente e convergerebbe ad un valore che non è la radice richiesta.

x_{k+1}	$x_1 = -2$	$x_2 = -1.1319$	$x_3 = -0.8519$	$x_4 = -0.8162$
$\lvert\delta_k\rvert$	$\delta_1 = 2$	$\delta_2 = 0.8681$	$\delta_3 = 0.28$	$\delta_4 = 0.036$

Table 1: Tabella dei valori delle 4 iterate di Newton e degli scarti

(iii) La funzione d'iterazione richiesta è $g(x) = \sqrt{\exp(x/2)}$ che facilmente si controlla avere la derivata prima minore di 1 in tutto $[1, 2]$. Essendo $x_0 = 1$.

x_{k+1}	$x_1 = 1.284$	$x_2 = 1.3785$	$x_3 = 1.4115$	$x_4 = 1.4231$
$\lvert\delta_k\rvert$	$\delta_1 = 0.284$	$\delta_2 = 0.095$	$\delta_3 = 0.033$	$\delta_4 = 0.012$

Table 2: Tabella dei valori delle 4 iterate e degli scarti

Un'altra funzione d'iterazione era $g_1(x) = \dfrac{\exp(x/2)}{x}$.

Tempo: **2.0 ore**.