Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Matricole Pari - Anno Accademico 2017-18
Prof. S. De Marchi, Dott.ssa E. Perracchione
Padova, 29 giugno 2018

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME, COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i celluari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.

Esercizi

1. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{2}{1+x^3}$, $x \in [0,3]$.

   (a) Si costruisca il polinomio d'interpolazione di grado 3, p_3, in forma di Newton sui punti $\{0,1,2,3\}$. Fare un grafico della funzione f e del polinomio p nell'intervallo [0, 3]. Calcolare l'errore d'interpolazione in modulo nel punto $\bar{x} = 1.5$. [vale 6 punti].

   (b) Usando gli stessi punti $\{0,1,2,3\}$ determinare il polinomio di approssimazione (nel senso dei minimi quadrati) di grado 1, p_1, rispetto alla base $\{1, x-1\}$. Fare anche di questo polinomio il grafico nello stesso grafico del punto precedente [vale 5 punti].

   (c) Si dicano quali formule di quadratura di tipo interpolatorio integrano esattamente i polinomi determinati ai punti (a) e (b). Si calcolino quindi il valore I_3 e I_1 di detti integrali. [vale 4 punti].

   NB: approssimare i risultati a 2 decimali.

   Soluzione.

   (a) Le differenze divise (approssimate) sono $d_0 = 2, d_1 = -1, d_2 = 1/9 = 0.1\bar{1}, d_3 = 0.07$. Il polinomio in forma di Newton é $p_3(x) = 2-x+0.11\,x\,(x-1)+0.07\,x\,(x-1)\,(x-2)$. L'errore é $|f(1.5) - p_3(1.5)| = |0.46 - 0.56| = 0.1$.

   (b) Significa risolvere il sistema sovradeterminato

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2/9 \\ 1/14 \end{pmatrix}$$

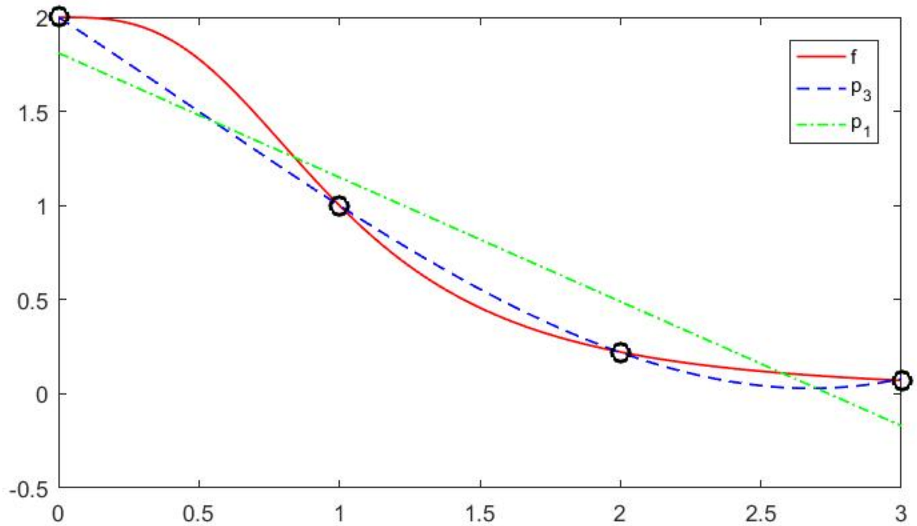

Figure 1: grafico della funzione f (in rosso), del polinomio interpolante p_3 (in blue) e della retta p_1(in verde)

Premoltiplicando per la trasporta si ottiene il sistema 2×2

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2/9 + 1/14 = 415/126 \approx 3.3 \\ -2 + 2/9 + 2/14 = -103/63 \approx -1.63 \end{pmatrix}$$

La cui soluzione é $a_0 = 1.15, a_1 = -0.66$. Il plot della retta è in colore verde.

(c) Il metodo di Simpson integra esattamente p_3 e quello dei trapezi p_1. Pertanto

$$\begin{aligned} I_3 = 3/6 * (p_3(0) + 4 * p_3(1.5) + p_3(3)) &= 0.5(f(0) + f(3) + 4p_3(1.5)) \\ &= 0.5(2 + 1/14 + 4 * 0.56) = 2.16\,. \end{aligned}$$

$$I_1 = 3/2 * (p_1(0) + p_1(3)) = 1.5 * (1.81 - 0.17) = 2.46\,.$$

2. Dati i vettori `a=[5 5 3 -5 -5]`, `b=[-1 0 0 1]` e `c=[0 1 1 0]`. Si consideri la matrice `A=diag(a)+diag(b,1)+diag(c,-1)`.

   (a) Si consideri la sottomatrice `A1=A(1:3,1:3)`. Quali sono gli autovalori di `A1`? Si consideri poi la sottomatrice `A2=A(3:5,3:5)`. Quali sono gli autovalori di `A2`? Si deduca quali sono gli autovalori di `A`. La matrice `A` è invertibile? [vale 5 punti].

(b) Si consideri il sistema lineare `Ax=b` con `b` scelto cosicchè `x=ones(5,1)`. Perchè è possibile applicare il metodo iterativo di Jacobi? Partendo dal vettore `x0=[1 0 1 1 0]` si determini `x2` col metodo di Jacobi. Si determini poi la norma 2 dell'errore tra `x2` e `x` [vale 6 punti].

(c) Si determini $\|J\|_\infty$, dove J è la matrice di Jacobi. Calcolare quindi il numero di iterazioni k necessarie affinchè si ottenga una soluzione a meno di 10^{-3} usando la formula

$$\|x^{(0)} - x^{(2)}\|_\infty \leq \frac{1 - \|J\|_\infty}{\|J\|_\infty^k} 10^{-3}\,.$$

[vale 4 punti].

Soluzione.

(a) La matrice richiesta è tridiagonale ottenuta sommando le tre matrici diagonali

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Essendo

$$A1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

è facile verificare che ha spettro $\sigma(A1) = \{5, 5, 3\}$. Analogamente

$$A2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

ha spettro $\sigma(A2) = \{3, -5, -5\}$. Pertanto $\sigma(A) = \{5, 5, 3, -5, -5\}$. Essendo poi `det(A)=1875 >0` la matrice è invertibile.

(b) Si può applicare il metodo di Jacobi perchà `A` è tridiagonale diagonalmente dominante. Il vettore `b=[4 5 4 -3 -5]'`, la matrice di Jacobi `J` è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il termine noto `q=[4/5 1 4/3 3/5 1]'`. Pertanto `x1=J*x0+q=[4/5 1 4/3 4/5 1]'` e `x2=[1 1 1 16/15 1]'`. Essendo `x-x2=[0 0 0 1/15 0]` la norma 2 dell'errore è $1/15 = 0.067$.

(c) Ora $\|J\|_\infty = 2/5$, $\|x^{(0)} - x^{(2)}\|_\infty = 1$. Da cui $k \geq \frac{\log(3/5 \cdot 10^{-3})}{\log(2/5)} = 8.1$ e prendendo la parte intera si otterrà $k = 9$.

Tempo: **2.0 ore**.