SCRITTO DI CALCOLO NUMERICO

Ingegneria Meccanica - matricole pari - AA 2017/18

Proff. Stefano De Marchi, Emma Perracchione

Padova, 4 settembre 2018

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME e COGNOME e numero di matricola. Non si possono usare manuali, libri e appunti. **Spegnere i cellulari e deporli sul banco.**
SI PUÒ USARE LA CALCOLATRICE.

ESERCIZI

1. Data la funzione $f(x) = \mathtt{e}^{-x/2} - x^2 + 1,\ x \in [-2, 2]$.

   (i) Fare il grafico e dedurre quante radici reali ha la funzione f nell'intervallo $[-2, 2]$. Si indichino inoltre gli intervalli separatori di ampiezza 0.2. [vale 4 punti].

   (ii) Mediante il metodo di Newton determinare la radice di modulo minore ξ_m partendo da $x_0 = 1$. Presentare in una tabella i risultati delle iterate x_1, x_2, x_3, x_4 e degli scarti $\delta_i = |x_i - x_{i-1}|,\ i = 1, 2, 3, 4$. Calcolare inoltre la velocità di convergenza come

$$p = \lfloor \frac{\ln(\delta_4)}{\ln(\delta_3)} \rfloor \tag{1}$$

   L'ordine di convergenza è quello atteso? [vale 5 punti].

   (iii) Indicata invece con ξ_M la radice di modulo maggiore, determinare un metodo d'iterazione di punto fisso convergente. Come al punto (ii) partendo da $x_0 = -2$ calcolare x_i, δ_i con $i = 1, \ldots, 4$. Calcolare inoltre la velocità di convergenza usando (1) L'ordine di convergenza è quello atteso? [vale 6 punti]

(NB: fornire i risultati arrotandati a 4 cifre decimali)

Soluzione

(i) La funzione ha due radici, una negativa in $[-2, -1.8]$ e una positiva in $[1.1, 1.3]$. Questa seconda è qualla di modulo minore.

(ii) La funzione d'iterazione di Newton è

$$g(x) = \frac{(x+2)e^{-x/2} + 2x^2 + 2}{e^{-x/2} + 4x}$$

. Le iterate e gli scarti sono come in Tabella 1

x_{k+1}	$x_1 = 1.2633$	$x_2 = 1.2403$	$x_3 = 1.2401$	$x_4 = 1.2401$
$\lvert\delta_k\rvert$	$\delta_1 = 0.2633$	$\delta_2 = 0.023$	$\delta_3 = 1.8\,10^{-4}$	$\delta_4 = 1.1\,10^{-8}$

Tabella 1: Tabella dei valori delle 4 iterate di Newton e degli scarti

Usando la formula (1) l'ordine è 2 come ci aspetta dal metodo di Newton.

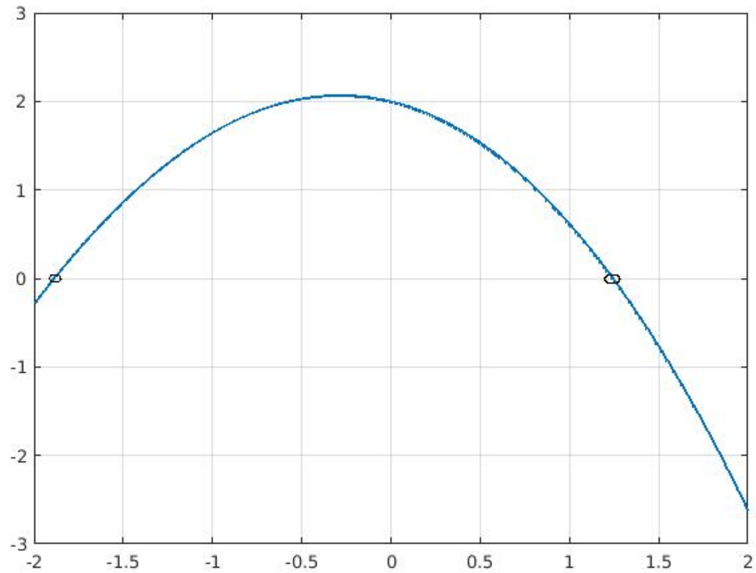

Figura 1: Grafico della funzione

(iii) La funzione d'iterazione richiesta è $g(x) = -\sqrt{e^{-x/2}+1}$ la cui derivata $g'(x) = \dfrac{e^{-x/2}}{4\sqrt{e^{-x/2}+1}}$ che risulta essere strettamente minore di 1 in $[-2, -1.8]$. Infatti la funzione g' si puó anche scrivere come $g'(x) = \dfrac{1}{4e^{x/2}\sqrt{e^{-x/2}+1}} < 1$ essendo il denominatore sempre maggiore di 0. Inoltre è strettamente decrescente, $g'(-2) = 0.3542$, $g'(-1.9) = 0.3414$, $g'(-1.8) = 0.3306$.

x_{k+1}	$x_1 = -1.9283$	$x_2 = -1.9033$	$x_3 = -1.8947$	$x_4 = -1.8918$
$\|\delta_k\|$	$\delta_1 = 0.072$	$\delta_2 = 0.025$	$\delta_3 = 8.6\,10^{-3}$	$\delta_4 = 2.9\,10^{-3}$

Tabella 2: Tabella dei valori delle 4 iterate del metodo di punto fisso e degli scarti

Usando la formula (1) l'ordine è 1 come ci aspetta dal metodo di punto fisso.

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Senza fare calcoli dire perchè gli autovalori sono tutti positivi e quindi `det(A)>0`.[vale 2 punti]

(b) Si calcolino gli autovalori delle sottomatrici $A(1:2,1:2)$ e $A(3:5,3:5)$. Indicato con λ_M e λ_m il più grande ed il più piccolo autovalore di A, rispettivamente, si dica se il numero di condizionamento in norma 2 di A,

$$\kappa_2(A) := \sqrt{\frac{\lambda_M(A \cdot A^T)}{\lambda_m(A \cdot A^T)}}$$

(ove $\lambda_M(A \cdot A^T) = 117.81$ e $\lambda_m(A \cdot A^T) = 5.33$) è uguale o diverso dal rapporto λ_M/λ_m. Perchè? [vale 4 punti]

(c) Si construisca a partire da A la matrice A_1 tale che $\kappa_2(A_1) = \lambda_{1,M}/\lambda_{1,m}$ (il pedice 1 serve a ricordare che ci riferiamo agli autovalori di A_1). [vale 2 punti]

(d) A partire da A_1 si costruisca la matrice $J = -D^{-1}(A_1 - D)$ del metodo iterativo di Jacobi. Perchè la matrice ha due coppie di autovalori simmetrici? Qual è `det(J)`, $\kappa_2(J)$ e quanto vale il raggio spettrale di J, $\rho(J)$? [vale 5 punti]

(e) Considerando la soluzione del sistema $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo iterativo di Jacobi, per la convergenza del metodo il valore di $\kappa_2(J)$ è importante? Si giustifichi la risposta. [vale 3 punti]

Si forniscano valori arrontondati a 2 decimali!

Soluzione

(a) La matrice è diagonamente dominante in senso stretto. Tutti i cerchi di Gerschgorin sono nel semiasse positivo. Inoltre la matrice ha tre blocchi simmetrici A(1:2,1:2), A(3,3), A(4:5,4:5) quindi gli autovalori sono reali. Detto cio' gli autovalori sono anche positivi e di conseguenza lo è il determinante

(b) Gli autovalori di A(1:2,1:2) (arrotondati a 2 decimali) sono: 4.15 e 10.85. Quelli del blocco $A(3:5,3:5)$ sono $5, 2.76, 7.24.\lambda_M = 10.85$ e $\lambda_m = 2.76$. Il rapporto $\lambda_M/\lambda_m = \kappa_2(A)$ se la matrice è simmetrica. A non è simmetrica, quindi saranno diversi. In ogni caso $\sqrt{\lambda_M(A\,A^T)/\lambda_m(A \cdot A^T)} = 4.7$ mentre $\lambda_M/\lambda_m = 3.93$

(c) La soluzione piú immediata é la matrice A_1 ottenuta ponendo $A(3,4) = 0$. Si poteva prendere $A(4,3) = 3$, ma in tala caso la matrice non é piú diagonalmente dominante in senso stretto e il metodo di Jacobi (richiesto a punto successivo) convergerebbe certamente piú lentamente. Comunque si poteva anche fare con calcoli solo piú complicati.

(d) La matrice J è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori, oltre a quello nullo, sono $0.41, -0.41$ e $0.22, -0.22$. Le coppie simmetriche derivano dai blocchi $J(1:2, 1:2)$ e $J(4:5, 4:5)$. Pertanto `det(J)=0`, $\kappa_2(J) = \infty$ perchè la matrice non è invertibile e $\rho(J) = 0.41$.

(e) Per la convergenza serve che $\rho(J) < 1$, come di fatto è. Per il condizionamento del problema $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha importanza $\kappa_2(A_1)$ non quello di J.

◊◊

Tempo: **1h 45m** .