Degree in Mechanical Engineering - Lab exercises

Prof. S. De Marchi

`Padova, 29 May 2018`

1 Solution of linear systems with the SOR

Write the M-function

- `function [x, iter, err] = SOR(A,b,tol,maxit,omega)`

that implement the SOR iterative method. We recall that `omega` has to be take such that $0 < \omega < 2$.
The output parameters are: `x` the solution vector, `iter` the number of iterations and `err` the vector of *relative errors* among iterations.

In the body of the functions define

- the initial solution `x0=zeros(length(b),1)` .
- the matrix H of the SOR.

2 Exercises

1. Construct the matrix `A=pentadiag(`α`,-1, -1)` for $n = 10$, $\alpha \in [0.5, 1.5]$, i.e. by using `A=toeplitz([ `α`, -1, -1,0, 0, 0, 0, 0, 0,0])`. Choose $\alpha = 3/4$. Solve the linear system $Ax = b$, with b so that `x=`α`*ones(n,1)`, by using the `SOR` method.

2. Take the tridiagonal matrix

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

   The right hand side $b(\alpha)$ be constructed as

$$b_1 = b_n = \alpha + 1,\ b_i = \alpha + 2,\ i = 2, \ldots, n-1\,.$$

   (a) Construct the iterations matrices P_J and P_{GS} and determine if they are convergent.
   (b) Solve the linear system $A(\alpha)x = b(\alpha)$ starting from $x^{(0)} = [1/n, 2/n, \ldots, 1]^T$ with $tol = 1.e-6$ and for $\alpha = 2, 4$ and $n = 8, 16$.
   (c) For which values of α can we determine directely the value of ω^*? For that optimal value, solve the system with the SOR.

3 A laboratory test

- Il candidato dovrà produrre uno script `.m` per **ogni** esercizio.
- commentare **bene** gli scripts usando il comando %.
- al termine della prova lasciare tutti i files nella propria cartella `home`.
- **vietato usare libri, appunti e naturalmente il cellulare**

`ESERCIZI`

1. Si considerino le funzioni $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = -\log x$, definite su $\mathbb{R}_{>0}$.

   Scrivere un file `esercizio1.m` che faccia le seguenti cose

   (a) Scelti 100 punti nell'intervallo $[0.1, 1]$, usando `linspace`, fa il plot delle due curve $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$. Esse s' intersecano in un unico punto, che chiameremo α. Per meglio individuare il punto sia usi anche il comando `grid`.

   (b) Per approssimare α, applicare il *metodo iterativo di Newton* (di cui si fornisce la funzione `Newton.m`) alla funzione $f(x) = x^2 + \log(x)$, con un opportuno punto iniziale, tolleranza `tol=1.e-8` e `kmax=20`. La chiamata della funzione `Newton` sarà

   ```
   [x1, k, err]=Newton(f, fp, x0, tol, kmax)
   ```

   NB: le funzioni `f` e `fp` sono la funzione $f(x)$ e la derivata prima $f'(x)$, rispettivamente.

   (c) Date le seguenti funzioni

   $$g_1(x) = -\log x$$
   $$g_2(x) = -\frac{\log x}{x^2}$$
   $$g_3(x) = e^{-x^2}$$

   dire quali possono essere considerate delle funzioni di iterazione di punto fisso per approssimare α, quali assicurano la convergenza e con che ordine.

   Motivare la risposta scrivendo le linee di codice necessarie per verificare la convergenza e l'ordine di approssimazione.

   (d) Usare quindi la funzione `MetodoIterativo.m` (fornita) per confermare quanto osservato al punto precedente, usando lo stesso punto iniziale del metodo di Newton, `tol=1.e-6` e `kmax=100`.

   ```
   [x1, k, err]=MetodoIterativo(fiter, x0, tol, kmax)
   ```

   dove `fiter` é la funzione d'iterazione del metodo.

   Fare quindi il plot in scala semilogaritmica dell'errore relativo.

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

e il termine noto b scelto cosicché la soluzione del sistema `Ax=b` sia `x=ones(5,1)`.

(a) Scrivere uno script `esercizio2.m` che risolva il sistema lineare mediante il metodo iterativo di Jacobi con `x0=[-1 0 0 0 -1]'`, `tol=1.e-8` e `kmax=30` e plotti in scala semilogaritmica l'errore relativo calcolato. Perché il metodo di Jacobi è risultato esserre convergente?

NB: Ricordo che la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi è `P=inv(D)*(D-A)`, con `D=diag(diag(A))`.

(b) Si risolva il sistema anche col metodo di Gauss-Seidel. Perché il metodo converge piú velocemente?

NB: Ricordo che la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel è `P=inv(D-B)*C`, con `D=diag(diag(A))`, `B=-(tril(A)-D)` e `C=-(triu(A)-D)`.