

ESAME DI CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA MECCANICA
CANALE 2 - ANNO ACCADEMICO 2019-20
Prof. S. De Marchi, Dott.ssa C. Campi
Padova, 18 giugno 2019

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME, COGNOME e NUMERO DI MATRICOLA.

Non si possono usare manuali, libri e appunti.

Spegnere i cellulari e deporli sul banco.

Si può usare solo la calcolatrice.

Approssimare i risultati, anche intermedi, a 2 decimali (eccetto altrimenti specificato).

Tempo: **2.0 ore.**

ESERCIZIO 1

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$, $x \in [0, 2]$.

- (a) Si costruisca il polinomio d'interpolazione di grado 2, p_2 , in forma di Newton sui punti $\{0, 1, 2\}$. Fare il grafico della funzione f e del polinomio p_2 nell'intervallo $[0, 2]$. Calcolare l'errore assoluto in $x^* = 3/2$. [vale 6 punti].
- (b) Usando i punti $\{0, 1/2, 3/2, 2\}$ determinare il polinomio di approssimazione (nel senso dei minimi quadrati) di grado 1, p_1 , rispetto alla base monomiale $\{1, x - 1\}$. Fare anche di questo polinomio il grafico nello stesso grafico del punto precedente [vale 6 punti].
- (c) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^2 k(x) dx \approx \alpha_1 k(0) + \alpha_2 k(1) + \alpha_3 k(2).$$

Determinare α_i cosicchè la formula sia esatta sui polinomi di grado 2.

Verificare quindi che $\int_0^2 (p_1(x))^2 dx - [\alpha_1 (p_1(0))^2 + \alpha_2 (p_1(1))^2 + \alpha_3 (p_1(2))^2] = 0$

[vale 4 punti].

ESERCIZIO 2

- (a) La funzione $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} + 1$ ha in $x \in [0, 2]$ un unico zero. Individuarne l'intervallo separatore di ampiezza $2/10$ [vale 3 punti].
- (b) Determinare x_3 , approssimazione dell'unico zero di g in $[0, 2]$, a partire da $x_0 = 1/2$ usando il metodo di Newton. Detta h la funzione d'iterazione di Newton iterativo, calcolare anche gli scarti $d_i = |x_{i+1} - x_i|$, $i = 0, 1, 2, 3$. In questo caso riportare i risultati con 4 cifre decimali mentre per gli scarti usare la notazione esponenziale [vale 7 punti].
- (c) Si consideri infine la funzione $r(x) = (x - 1/2)^2(x + 1)$ dove $1/2$ è zero doppio. Si determini la radice usando il metodo delle secanti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{r(x_k)(x_k - x_{k-1})}{r(x_k) - r(x_{k-1})}, \quad k \geq 1$$

con valori iniziali $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.2$. Calcolare x_3 . Quanto vale d_3 in questo caso? [vale 5 punti].

Soluzione.

ESERCIZIO 1

- (a) Le differenze divise (approssimate) sono $d_0 = -2, d_1 = 7/4, d_2 = -41/60$. Il polinomio in forma di Newton é $p_2(x) = -2 + 7/4x - 41/60x(x - 1)$. L'errore é $|f(3/2) - p_2(3/2)| \approx 0.08$.

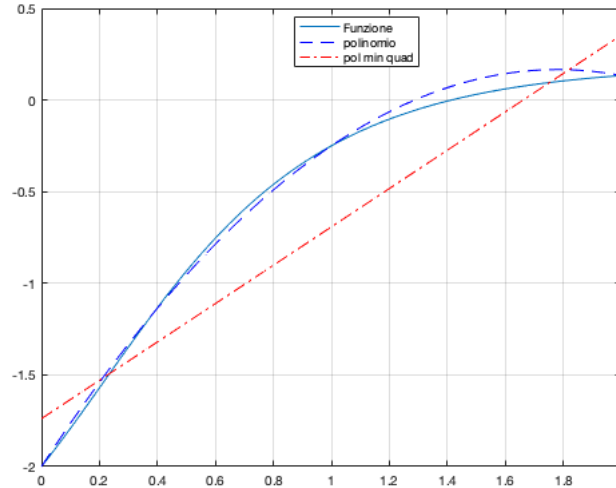


Figure 1: grafico della funzione f , del polinomio interpolante p_2 (in blue) e della retta p_1 ai minimi quadrati

- (b) Significa risolvere il sistema sovradeterminato

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14/15 \\ 2/65 \\ 2/15 \end{pmatrix}$$

Premoltiplicando per la trasporta si ottiene il sistema 2×2

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36/13 \\ 34/13 \end{pmatrix}$$

La cui soluzione é $a_0 = -9/13, a_1 = 68/65$. Il polinomio è $p_1(x) = a_0 + a_1(x - 1)$ (vedi Figura 1).

- (c) Significa risolvere il sistema dei momenti

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 = 8/3 \end{cases}$$

Ottenendo la soluzione $\alpha_1 = 1/3 = \alpha_3, \alpha_2 = 4/3$.

L'errore richiesto è ovviamente zero poiché per costruzione la formula è esatta sui polinomi di grado 2 e $p_1^2(x)$ è un polinomio di secondo grado.

ESERCIZIO 2

- (a)] Lo zero di g è semplicemente lo zero del numeratore $x^3 + 2x^2 + x - 1$ (poiché il denominatore si può fattorizzare in $(x + 1)(x^2 + 1)$ che non si annulla mai in $[0,2]$). Il grafico del numeratore è in Figura 2. L'intervallo richiesto è $[0.4,0.6]$

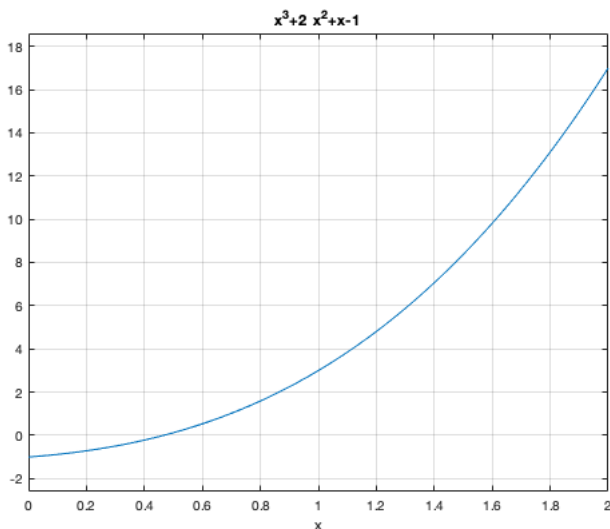


Figure 2: grafico del numeratore di g in $[0,2]$

- (b) L'iterazione di Newton ha funzione d'iterazione

$$h(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 1}{3x^2 + 4x + 1} .$$

Pertanto $x_0 = 1/2$, $x_1 = 0.4667$, $x_2 = 0.4656$, $x_3 = 0.4656$ e gli scarti sono $d_0 = 3e - 2$, $d_1 = 1.e - 3$, $d_2 = 1.2e - 6$, $d_3 = 1.3e - 12$.

- (c) $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.35$ e $x_3 = 0.41$. $d_3 \approx 0.06$.