Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Canale 2 - Anno Accademico 2019-20
Prof. S. De Marchi, Dott.ssa C. Campi
Padova, 24 gennaio 2020

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME, COGNOME e NUMERO DI MATRICOLA.
Non si possono usare manuali, libri e appunti. Spegnere i cellulari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.
Approssimare i risultati, anche intermedi, a 2 decimali (eccetto altrimenti specificato).
Tempo: **2.0 ore**.

Esercizio 1

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\sqrt{2}x - 6}{x^2 + x + 1}$, $x \in [1, 5/2]$.

(a) La funzione ha un unica radice, ξ, nell' intervallo considerato. Perché? [vale 2 punti].

(b) Si risolva con il metodo di Newton l'equazione $f(x) = 0$, $x \in [1, 5/2]$. Chiamiamo con α lo zero che si determina dopo 3 iterazioni del metodo di Newton a partire da $x_0 = 5/2$ [vale 5 punti].

(c) Usando i punti $\{x_0 = 1, x_1 = 1.2\}$ e il punto $\alpha \approx x_3$ ottenuto al punto (b) con Newton, mediante la formula dei trapezi composita a passo non costante

$$I(f) = \frac{h_1}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h_2}{2}(f(x_1) + f(\alpha))$$

con h_1 e h_2 le distanze tra i punti, si determini l'approssimazione di

$$\int_1^\alpha f(x)dx$$

[vale 4 punti].

(d) Si consideri infine la funzione $r(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)}$ dove 1 è zero doppio. Si determini la radice usando il metodo delle secanti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{r(x_k)(x_k - x_{k-1})}{r(x_k) - r(x_{k-1})}, \ k \geq 1$$

con valori iniziali $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.5$. Calcolare x_3. Quanto vale $d_2 = |x_3 - x_2|$? [vale 5 punti].

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{4}{1+x^3}$, $\quad x \in [0, 3]$.

(a) Si costruisca il polinomio d'interpolazione di grado 3, p_3, in forma di Newton sui punti $\{0, 1, 2, 3\}$. Fare un grafico della funzione f e del polinomio p nell'intervallo $[0, 3]$. Calcolare l'errore d'interpolazione in modulo nel punto $\hat{x} = 2.5$ [vale 6 punti].

(b) Usando gli stessi punti $\{0, 1, 2, 3\}$ determinare il polinomio di approssimazione (nel senso dei minimi quadrati) di grado 1, p_1, rispetto alla base $\{1, x-1\}$. Fare anche di questo polinomio il grafico nello stesso grafico del punto precedente [vale 5 punti].

(c) Si dicano quali formule di quadratura di tipo interpolatorio integrano esattamente i polinomi determinati ai punti (a) e (b). Si calcolino quindi il valore I_3 e I_1 di detti integrali [vale 4 punti].

Soluzione.

ESERCIZIO 1

(a) Osservando che il denominatore non si annulla mai, consideriamo solo il numeratore $x^2+2\sqrt{2}x-6$. Questa funzione è strettamente crescente in $[1,\ 5/2]$ ($f'(x) = 2x+2\sqrt{2} > 0 \forall x \in [1,5/2]$), è negativa nell'estremo sinistro e positiva in quello destro e quindi ha un solo zero che sappiamo essere $\xi = \sqrt{2} \approx 1.4$.

(b) Considerando solo in numeratore la funzione d'iterazione di Newton diventa

$$g(x) = x - \frac{x^2+2\sqrt{2}x-6}{2x+2\sqrt{2}} = \frac{2x^2+2\sqrt{2}x-x^2-2\sqrt{2}x+6}{2x+2\sqrt{2}} = \frac{x^2+6}{2x+2\sqrt{2}}\,.$$

Partendo da $x_0 = 5/2$ si ha $x_1 \approx 1.56$, $x_2 \approx 1.42$ e $x_3 \approx 1.41$

(c) Si tratta di calcolare

$$\int_1^\alpha f(x)dx \approx \frac{1.5-1}{2}(f(1)+f(1.2)) + \frac{2.13-1.5}{2}(f(1.2)+f(\alpha)) =$$

$$= \frac{0.2}{2}(-0.72-0.32) + \frac{0.21}{2}(-0.32+0) = -0.14\,.$$

(d) $r(x_0) = r(0) = 1$, $r(x_1) = r(0.5) = 0.17$

$x_2 = x_1 - \frac{r(x_1)(x_1-x_0)}{r(x_1)-r(x_0)} = 0.5 - \frac{0.17(0.5-0)}{0.17-1} = 0.6 \quad r(x_2) = r(0.6) = 0.1$

$x_3 = x_2 - \frac{r(x_2)(x_2-x_1)}{r(x_2)-r(x_1)} = 0.6 - \frac{0.1(0.6-0.5)}{0.1-0.17} = 0.74$

$d_2 = |x_3 - x_2| = |0.74 - 0.6| = 0.14$

ESERCIZIO 2

(a) Le differenze divise (approssimate) sono $d_0 = 4, d_1 = -2, d_2 = 2/9 = 0.2\bar{2}, d_3 = 0.14$. Il polinomio in forma di Newton è $p_3(x) = 4-2x+0.22\,x\,(x-1)+0.14\,x\,(x-1)\,(x-2)$. L'errore é $|f(2.5)-p_3(2.5)| = |0.24-0.09| = 0.15$.

(b) Significa risolvere il sistema sovradeterminato

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4/9 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

Premoltiplicando per la trasporta si ottiene il sistema 2×2

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+4/9+1/7 = 415/63 \approx 6.6 \\ -4+4/9+2/7 = -206/63 \approx -3.27 \end{pmatrix}$$

La cui soluzione è $a_0 = 2.3, a_1 = -1.31$. Il plot della retta è in colore verde.

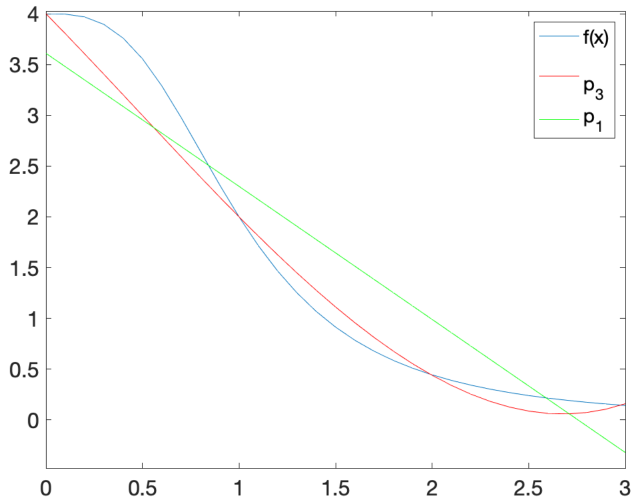

Figure 1: grafico della funzione f (in blu, del polinomio interpolante p_3 (in rosso) e della retta p_1(in verde)

(c) Il metodo di Simpson integra esattamente p_3 e quello dei trapezi p_1. Pertanto

$$\begin{aligned} I_3 = 3/6 * (p_3(0) + 4 * p_3(1.5) + p_3(3)) &= 0.5(f(0) + f(3) + 4p_3(1.5)) \\ &= 0.5(4 + 1/7 + 4 * 1.11) = 4.29 \end{aligned}$$

$$I_1 = 3/2 * (p_1(0) + p_1(3)) = 1.5 * (3.61 - 0.32) = 4.94\,.$$