Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Canale 2 - Anno Accademico 2019-20
Prof. S. De Marchi, Dott.ssa C. Campi
Padova, 2 luglio 2019

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME, COGNOME e NUMERO DI MATRICOLA.
Non si possono usare manuali, libri e appunti.
Spegnere i cellulari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.
Approssimare i risultati, anche intermedi, a 2 decimali (eccetto altrimenti specificato).
Tempo: **2.0 ore**.

Esercizio 1

(a) Data la formula di quadratura

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx w_0 f(-2) + w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1)$$

Trovare $w_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ cosicchè sia esatta sui polinomi di grado 3. Risolvere il sistema dei momenti con il metodo di eliminazione di Gauss riportando la matrice triangolare inferiore e il termine noto dopo i tre passi di eliminazione. La matrice triangolare risultante che determinante ha? Si può dire che la matrice di partenza soddisfa la fattorizzazione LU senza pivoting? [vale 8 punti]

(b) Si integri con detta formula di quadratura la funzione $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 - 3$ [vale 3 punti].

(c) Usando la formula dell' errore della formula trapezoidale sulla funzione del punto precedente, quanti punti sarebbero necessari per ottenere un errore di 10^{-9}? Ricordo che la formula dell'errore è

$$|R_1(f)| = \frac{(b-a)^3}{12 \cdot (*)} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

dove (*) è $N^{\cdots}$ (da completare da parte dello studente).

La stessa cosa con Simpson composito cosa porterebbe a concludere? [vale 5 punti]

Esercizio 2 Si consideri l'equazione $f(x) = e^{-x} - x + 1$ nell'intervallo $I = [0, 2]$.

(a) f ha un unico zero α in I. Perchè? [vale 2 punti]

(b) Individuato un sotto intervallo che contiene lo zero, trovare un metodo di punto fisso convergente ad α. Calcolare gli scarti $d_i = |x_{i+1} - x_i|,\ i = 0, 1, 2, 3$ partendo con x_0 coincidente con uno degli estremi del sotto intervallo. Sapendo che l'ordine di convergenza è approssimato al passo i come $r_i \approx \frac{d_{i+1}}{d_i}$, si determini r_2. [vale 7 punti]

(c) Si prenda ora l'iterazione per il calcolo dello zero di $f(x) = e^{-x} - x + 1$ nell'intervallo $I = [0, 2]$

$$x_{n+1} = \frac{\omega e^{-x_n} + x_n + \omega}{1 + \omega}, \quad n \geq 0,\ \omega \in [-2, 2]. \tag{1}$$

- Dimostrare che questa iterazione è un'iterazione di punto fisso per f.
- Dire per quali valori di $\omega \in [-2, 2]$ non è di punto fisso.
- Considerati $\omega \in \{-2, 2\}$, per quale valore di ω si ha convergenza?

[vale 6 punti]

− −

Soluzioni.

Esercizio 1

(a) Il sistema dei momenti è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -8 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 16/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dopo i tre passi di eliminazione si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 40/3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è $w_0 = 0, w_1 = 8/3, w_2 = -4/3, w_3 = 8/3$.

La matrice risultante ha determinate uguale a 6. Le sottomatrici principali di testa di ordine 1, 2 e 3 hanno determinanti $1, 1$ e 2 rispettivamente. Pertanto la matrice dei momenti soddisfa le condizioni per essere fattorizzata in LU, senza pivoting.

(b) La funzione integranda altro non è che $f(x) = x^3 + x^2 - 4$. Integrandola usando la formula di quadratura data (esatta su polinomi di grado 3) si ha

$$8/3f(-1) - 4/3f(0) + 8/3f(1) = 8/3(-4) - 4/3(-4) + 8/3(-2) = -32/3$$

(c) Ora $f(x) = x^3 + x^2 - 4$ ha $f''(x) = 6x + 2$ che ha il massimo in 2 che vale 14. Pertanto dalla formula si ottiene

$$N \geq \left\lfloor \sqrt{\frac{4^3 \cdot 14}{12 \cdot 10^{-9}}} \right\rfloor$$

ovvero $2.7 \cdots 10^5$ punti. Simpson è esatta sui polinomi di terzo grado, quindi l'errore sarebbe zero.

Esercizio 2

(a) La funzione è strettamente decrescente in $[0, 2]$. Inoltre $f(0) = 2 > 0$ mentre $f(2) = e^{-2} - 1 < 0$.

(b) L'intervallo separatore che considero è $I_\alpha = [1.2, 1.3]$. Il metodo di punto fisso richiesto ha $g(x) = e^{-x} + 1$ che ha $|g'(x)| = e^{-x} < 1$ in I_α e quindi converge.

Partendo da $x_0 = 1.2$ otteniamo $x_1 = 1.3012$, $x_2 = 1.2722$ e $x_3 = 1.2802$. Da cui $d_1 = 1.e - 1$, $d_2 = 2.9e - 2$, $d_3 = 8.e - 3$.

$r_2 = d_3/d_2 \approx 0.29$

(c) L'iterazione è di punto fisso per la funzione $f(x) = e^{-x} - x + 1$:

$$x(\omega + 1) = \omega e^{-x} + x + \omega \Rightarrow x\omega + x = \omega e^{-x} + x + \omega$$

$$\omega x = \omega e^{-x} + \omega$$

L'iterazione non è di punto fisso per $\omega = 0, -1$ per $\omega = 0$ si ha $x_{n+1} = x_n$, mentre per $\omega = -1$ si annulla il denominatore $\omega + 1$.

Per rispondere all'ultima domanda, si tratta di valutare $g'(\alpha)$ nei due valori di $\omega \in \{-2, 2\}$. Quello per cui si otterrà un valore più piccolo in modulo, darà la convergenza migliore.

Ora $g'(\alpha) = \dfrac{-\omega e^{-\alpha} + 1}{1 + \omega}$. Sapendo che $e^{-\alpha} = \alpha - 1$ abbiamo $g'(\alpha) = \frac{\omega(1-\alpha)+1}{1+\omega} = 1 - \left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)\alpha$

Quindi

$g_{-2} = g'(\alpha, -2) = 1 - 2\alpha$

$g_2 = g'(\alpha, 2) = 1 - \frac{2}{3}\alpha$

dobbiamo vedere quale tra i valori g_{-2} e g_2 in modulo è più piccolo di 1. Essendo $\hat{\alpha} \approx 1.28$ in modulo $g_2 < 1 < g_{-2}$, si ha convergenza per $\omega = 2$.