Esame di Calcolo Numerico per Ingegneria Meccanica
Canale 2 - Anno Accademico 2019-20
Prof. S. De Marchi, Dott.ssa C. Campi
Padova, 30 agosto 2019

NOTA BENE. Mettere su ogni foglio NOME, COGNOME e NUMERO DI MATRICOLA.
Non si possono usare manuali, libri e appunti.
Spegnere i cellulari e deporli sul banco.
Si può usare solo la calcolatrice.
Approssimare i risultati, anche intermedi, a 2 decimali (eccetto altrimenti specificato).
Tempo: **2.0 ore**.

Esercizio 1

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + x + 1}$, $x \in [1, 5/2]$.

(a) La funzione ha un unica radice, ξ, nell' intervallo considerato. Perché? Si determini un metodo di punto fisso convergente a ξ. A partire da $x_0 = 1$ determinare x_4 e gli errori assoluti in modulo $e_0, \ldots, e_4$, $e_i = |\xi - x_i|$. Approssimare i risultati a 4 decimali [vale 6 punti].

(b) Si risolva con il metodo di Newton l'equazione $f(x) = 1$, $x \in [1, 5/2]$. Chiamiamo con α lo zero che si determina dopo 3 iterazioni del metodo di Newton a partire da $x_0 = 5/2$ [vale 5 punti].

(c) Usando i punti $\{x_0 = 1, x_1 = 3/2\}$ e il punto $\alpha \approx x_3$ ottenuto al punto (b) con Newton, mediante la formula dei trapezi composita a passo non costante

$$I(f) = \frac{h_1}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h_2}{2}(f(x_1) + f(\alpha))$$

con h_1 e h_2 le distanze tra i punti, si determini l'approssimazione di

$$\int_1^\alpha f(x)dx$$

prendendo $f(\alpha) = 0.68$ [vale 5 punti].

Esercizio 2 (suggerimento: fare i conti con i numeri razionali e approssimare a due decimali solo nei passaggi finali)

Sia

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare condizioni sufficienti per la convergenza con il metodo di Jacobi, Gauss-Seidel, SOR [vale 3 punti].

(b) Scelto $\alpha = 1/2$, il metodo di Gauss-Seidel è convergente? Se sì, si costruisca la matrice di iterazione di Gauss-Seidel e si indichi una maggiorazione del suo raggio spettrale ρ (autovalore di modulo massimo) [vale 5 punti].

(c) Con il valore di α fissato al punto precedente, si consideri il sistema $A_\alpha x = b$ con $b = [3/2, 5, 3, 4]'$. Scelto come punto iniziale $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]'$, si calcolino $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ con il metodo di Gauss-Seidel [vale 5 punti].

(d) Data

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1/2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

qual è un'operazione che si può effettuare per applicare il metodo di Jacobi a questa matrice? [vale 2 punti].

Soluzione.

Esercizio 1

(a) Osservando che il denominatore non si annulla mai, consideriamo solo il numeratore $x^3 - 2$. Questa funzione é strettamente crescente in $[1,\, 5/2]$ $(f'(x) = 3x^2 > 0 \forall x \in [1, 5/2])$, è negativa nell'estremo sinistro e positiva in quello destro e quindi ha un solo zero che sappiamo essere $\xi = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1.2599$. Un metodo di punto fisso si ottiene , prendendo $g(x) = \sqrt{\frac{2}{x}}$ che é convergente essendo $|g'(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}\ x^{3/2}}\right| < 1$ quando $x \in [1, 5/2]$.

I valori richiesti sono $x_0 = 1, x_1 = \sqrt{2} \approx 1.4142, x_2 \approx 1.1892, x_3 = 1.2968, x_4 \approx 1.2419$ ed errori $e_0 = 0.2599, e_1 = 0.1543, e_2 = 0.0707, e_3 = 0.0369, e_4 = 0.0180$.

(b) Anzitutto $f(x) = 1$ equivale a risolvere

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 + x + 1} = 1 \Rightarrow x^3 - 2 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - x - 3 = 0$$

con Newton. La funzione d'iterazione di Newton diventa

$$g(x) = x - \frac{x^3 - x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{2x^3 - x^2 + 3}{3x^2 - 2x - 1}\,.$$

Partendo da $x_0 = 5/2$ si ha $x_1 =\approx 2.20$, $x_2 \approx 2.13$ e $x_3 \approx 2.13$

(c) Si tratta di calcolare

$$\int_1^{\alpha} f(x)dx \approx \frac{1.5 - 1}{2}(f(1) + f(3/2)) + \frac{2.13 - 1.5}{2}(f(3/2) + f(\alpha)) =$$

$$= 0.25(-1/3 + 0.29) + (0.32)(0.29 + 0.68) = 0.30\,.$$

Esercizio 2

(a) Una condizione sufficiente per la convergenza del metodo di Jacobi è che A sia a diagonale strettamente dominante, cosa che viene verificata con $|\alpha| > 1$ e quindi $\alpha > 1 \cup \alpha < -1$. Non consideriamo le altre righe in quanto $|3| > 1,\ |2| > 1,\ |4| > 0\ \forall\alpha$. Una condizione sufficiente per la convergenza di Gauss-Seidel e di SOR con $\omega \in (0, 2)$ è data da: A simmetrica (e in questo caso lo è) e definita positiva. A è definita positiva se il determinante delle sottomatrici prinicipali di testa è positivo e quindi le condizioni sono $\alpha > 0$, $3\alpha - 1 > 0$, $5\alpha - 2 > 0$. Quindi $\alpha > 2/5$ è condizione sufficiente per Gauss-Seidel e SOR con $\omega \in (0, 2)$.

(b) Scelto $\alpha = 1/2$:

$$A_{1/2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

la matrice di iterazione di Gauss-Seidel è $P = M^{-1}N$ con $M = D + L$ e $N = -U$, $D = diag(A)$, L triangolare inferiore e U triangolare superiore

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare l'inversa di M, calcoliamo per prima cosa $det(M) = 12$ e la matrice dei cofattori

$$CM = \begin{pmatrix} 24 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'inversa di M è:

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)} CM' = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

e

$$P = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di P sono 0 e 5/6 (basta calcolare $det(P - \lambda I)$) quindi una maggiorazione del raggio spettrale ρ è data ad esempio da $1 > |5/6|$.

(c) Generica iterazione: $x^{k+1} = Px^k + M^{-1}b$ con

$$M^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + 5/3 \\ 1/2 - 5/6 + 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2/3 \\ 7/6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]'$ abbiamo $Px^{(0)} = [0, 0, 0, 0]'$ e quindi $x^{(1)} = M^{-1}b = [3, 2/3, 7/6, 1]'$.

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2/3 \\ 7/6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2/3 \\ 7/6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/18 \\ -1/36 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2/3 \\ 7/6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 13/18 \\ 41/36 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) E' sufficiente permutare la prima riga con la seconda e la terza con la quarta in modo da ottenere una matrice a diagonale strettamente dominante.