Analisi del modello di Lotka-Volterra

Un esempio di sistema di Equazioni Differenziali 2x2

Stefano De Marchi

Dipartimento di Informatica
Università di Verona
http://www.sci.univr.it/~demarchi

Verona, 24 aprile 2007

Modello non lineare di Lotka-Volterra: I

- L'interazione tra 2 specie si può rappresentare con il seguente sistema di equazioni differenziali accoppiate nelle funzioni $x(t)$, $y(t)$, con $x(t)$ che rappresenta la popolazione delle prede al tempo t e $y(t)$ quella dei predatori.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \tag{1}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = c\,x(t)y(t) - d\,y(t) \tag{2}$$

- a, b, c, d sono costanti reali positive.
- $a\,x(t)$ indica fattore di crescita, mentre l'effetto delle presenza dei predatori è incluso in $-bx(t)y(t)$;
- $-dy(t)$ è la crescita (negativa) dei predatori in assenza di prede e $cx(t)y(t)$ indica l'aumento nella crescita dei predatori.

Modello non lineare di Lotka-Volterra: I

- L'interazione tra 2 specie si può rappresentare con il seguente sistema di equazioni differenziali accoppiate nelle funzioni $x(t)$, $y(t)$, con $x(t)$ che rappresenta la popolazione delle prede al tempo t e $y(t)$ quella dei predatori.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \tag{1}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = c\,x(t)y(t) - d\,y(t) \tag{2}$$

- a, b, c, d sono costanti reali positive.
- $a\,x(t)$ indica fattore di crescita, mentre l'effetto delle presenza dei predatori è incluso in $-bx(t)y(t)$;
- $-dy(t)$ è la crescita (negativa) dei predatori in assenza di prede e $cx(t)y(t)$ indica l'aumento nella crescita dei predatori.

Modello non lineare di Lotka-Volterra: I

- L'interazione tra 2 specie si può rappresentare con il seguente sistema di equazioni differenziali accoppiate nelle funzioni $x(t)$, $y(t)$, con $x(t)$ che rappresenta la popolazione delle prede al tempo t e $y(t)$ quella dei predatori.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = c\,x(t)y(t) - d\,y(t) \qquad (2)$$

- a, b, c, d sono costanti reali positive.
- $a\,x(t)$ indica fattore di crescita, mentre l'effetto delle presenza dei predatori è incluso in $-bx(t)y(t)$;
- $-dy(t)$ è la crescita (negativa) dei predatori in assenza di prede e $cx(t)y(t)$ indica l'aumento nella crescita dei predatori.

Modello non lineare di Lotka-Volterra: I

- L'interazione tra 2 specie si può rappresentare con il seguente sistema di equazioni differenziali accoppiate nelle funzioni $x(t)$, $y(t)$, con $x(t)$ che rappresenta la popolazione delle prede al tempo t e $y(t)$ quella dei predatori.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \tag{1}$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = c\,x(t)y(t) - d\,y(t) \tag{2}$$

- a, b, c, d sono costanti reali positive.
- $a\,x(t)$ indica fattore di crescita, mentre l'effetto delle presenza dei predatori è incluso in $-bx(t)y(t)$;
- $-dy(t)$ è la crescita (negativa) dei predatori in assenza di prede e $cx(t)y(t)$ indica l'aumento nella crescita dei predatori.

Modello non lineare di Lotka-Volterra: I

- L'interazione tra 2 specie si può rappresentare con il seguente sistema di equazioni differenziali accoppiate nelle funzioni $x(t)$, $y(t)$, con $x(t)$ che rappresenta la popolazione delle prede al tempo t e $y(t)$ quella dei predatori.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \tag{1}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = c\,x(t)y(t) - d\,y(t) \tag{2}$$

- a, b, c, d sono costanti reali positive.
- $a\,x(t)$ indica fattore di crescita, mentre l'effetto delle presenza dei predatori è incluso in $-bx(t)y(t)$;
- $-dy(t)$ è la crescita (negativa) dei predatori in assenza di prede e $cx(t)y(t)$ indica l'aumento nella crescita dei predatori.

Modello non lineare di Lotka-Volterra: II

Ponendo

$$\tau = at, \; u(\tau) = \frac{c}{d}x(t), \; v(\tau) = \frac{b}{a}y(t)$$

si ottiene un sistema riscalato:

$$du/d\tau = u(\tau)(1 - v(\tau)) \tag{3}$$

$$dv/d\tau = \alpha v(\tau)(u(\tau) - 1) \tag{4}$$

con $\alpha = d/a$.

Nota: in questo modo otteniamo un sistema dipendente solo dal parametro α.

Usando le equazioni (3) e (4) si osserva che i punti $(u, v) = (0, 0)$ e $(u, v) = (1, 1)$ sono punti in cui le equazioni differenziali si annullano e sono detti punti di equilibrio.

Modello non lineare di Lotka-Volterra: II

Ponendo

$$\tau = at, \; u(\tau) = \frac{c}{d}x(t), \; v(\tau) = \frac{b}{a}y(t)$$

si ottiene un sistema riscalato:

$$du/d\tau = u(\tau)(1 - v(\tau)) \tag{3}$$

$$dv/d\tau = \alpha v(\tau)(u(\tau) - 1) \tag{4}$$

con $\alpha = d/a$.

Nota: in questo modo otteniamo un sistema dipendente solo dal parametro α.

Usando le equazioni (3) e (4) si osserva che i punti $(u, v) = (0, 0)$ e $(u, v) = (1, 1)$ sono punti in cui le equazioni differenziali si annullano e sono detti punti di equilibrio.

Modello non lineare di Lotka-Volterra: II

Ponendo

$$\tau = at, \; u(\tau) = \frac{c}{d}x(t), \; v(\tau) = \frac{b}{a}y(t)$$

si ottiene un sistema riscalato:

$$du/d\tau = u(\tau)(1 - v(\tau)) \tag{3}$$
$$dv/d\tau = \alpha v(\tau)(u(\tau) - 1) \tag{4}$$

con $\alpha = d/a$.
Nota: in questo modo otteniamo un sistema dipendente solo dal parametro α.
Usando le equazioni (3) e (4) si osserva che i punti $(u, v) = (0, 0)$ e $(u, v) = (1, 1)$ sono punti in cui le equazioni differenziali si annullano e sono detti punti di equilibrio.

Modello non lineare di Lotka-Volterra: II

Ponendo

$$\tau = at,\ u(\tau) = \frac{c}{d}x(t),\ v(\tau) = \frac{b}{a}y(t)$$

si ottiene un sistema riscalato:

$$du/d\tau = u(\tau)(1 - v(\tau)) \tag{3}$$

$$dv/d\tau = \alpha v(\tau)(u(\tau) - 1) \tag{4}$$

con $\alpha = d/a$.

Nota: in questo modo otteniamo un sistema dipendente solo dal parametro α.

Usando le equazioni (3) e (4) si osserva che i punti $(u, v) = (0, 0)$ e $(u, v) = (1, 1)$ sono punti in cui le equazioni differenziali si annullano e sono detti punti di equilibrio.

Un pò di algebra...

- $$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{du}\frac{du}{d\tau} \qquad (5)$$

- da cui
$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{\alpha u\, v\ - \alpha v}{u - u\, v} \qquad (6)$$

- Pertanto, pensando v come funzione di u con pendenza $\frac{dv}{du}$, possiamo tracciare un campo di direzioni che ci darà delle indicazioni sugli eventuali punti di equilibrio.

- Questo lo possiamo fare anche nel sistema originale (1) ottenendo
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{cxy - dy}{ax - bxy} \qquad (7)$$

Un pò di algebra...

- $$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{du}\frac{du}{d\tau} \qquad (5)$$

- da cui
$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{\alpha u\, v\, - \alpha v}{u - u\, v} \qquad (6)$$

- Pertanto, pensando v come funzione di u con pendenza $\frac{dv}{du}$, possiamo tracciare un campo di direzioni che ci darà delle indicazioni sugli eventuali punti di equilibrio.

- Questo lo possiamo fare anche nel sistema originale (1) ottenendo
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{cxy - dy}{ax - bxy} \qquad (7)$$

Un pò di algebra...

- $$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{du}\frac{du}{d\tau} \tag{5}$$

- da cui
$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{\alpha u\, v\ - \alpha v}{u - u\, v} \tag{6}$$

- Pertanto, pensando v come funzione di u con pendenza $\frac{dv}{du}$, possiamo tracciare un campo di direzioni che ci darà delle indicazioni sugli eventuali punti di equilibrio.

- Questo lo possiamo fare anche nel sistema originale (1) ottenendo
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{cxy - dy}{ax - bxy} \tag{7}$$

Un pò di algebra...

- $$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{du}\frac{du}{d\tau} \tag{5}$$

- da cui
$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{\alpha u\, v\; - \alpha v}{u - u\, v} \tag{6}$$

- Pertanto, pensando v come funzione di u con pendenza $\frac{dv}{du}$, possiamo tracciare un campo di direzioni che ci darà delle indicazioni sugli eventuali punti di equilibrio.

- Questo lo possiamo fare anche nel sistema originale (1) ottenendo
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{cxy - dy}{ax - bxy} \tag{7}$$

Esempio 1 (1)

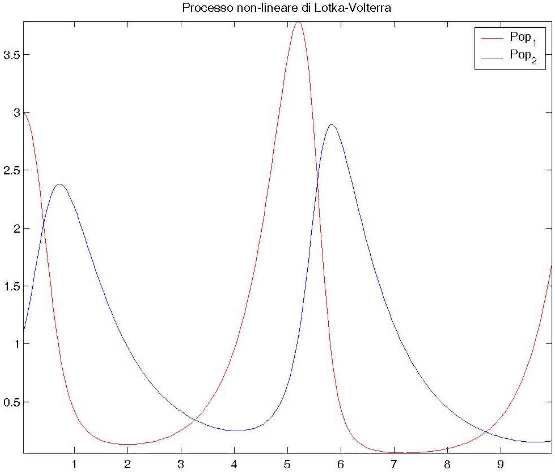

Figure: 1. Sistema di LV con $x_0 = 3, y_0 = 1,\ a = b = 2,\ c = d = 1,\ t_f = 10(tempofinale)$.

Esempio 1 (2)

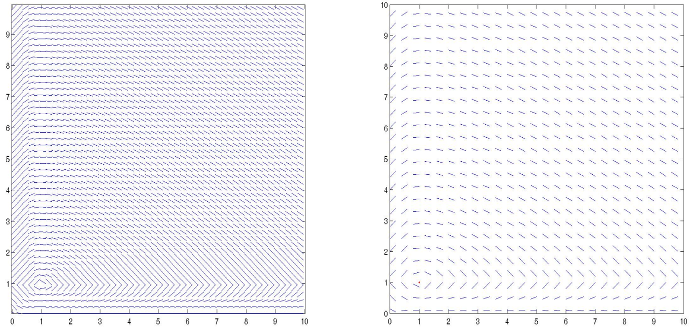

Figure: 2. Campo di direzioni corrispondente all'esempio precedente

Terminologia

- Quando rappresentiamo le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali come in Fig. 2, il piano u, v viene detto piano delle fasi e le curve soluzione sono dette traiettorie (di fase).
- Una traiettoria è il cammino percorso da una soluzione (u, v) al trascorrere del tempo.
- Un ritratto di fase sarebbe l'insieme del punti di equilibrio e alcune traiettorie di fase scelte nel piano delle fasi (cfr. Fig. 2 destra).

Terminologia

- Quando rappresentiamo le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali come in Fig. 2, il piano u, v viene detto piano delle fasi e le curve soluzione sono dette traiettorie (di fase).
- Una traiettoria è il cammino percorso da una soluzione (u, v) al trascorrere del tempo.
- Un ritratto di fase sarebbe l'insieme del punti di equilibrio e alcune traiettorie di fase scelte nel piano delle fasi (cfr. Fig. 2 destra).

Terminologia

- Quando rappresentiamo le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali come in Fig. 2, il piano u, v viene detto piano delle fasi e le curve soluzione sono dette traiettorie (di fase).
- Una traiettoria è il cammino percorso da una soluzione (u, v) al trascorrere del tempo.
- Un ritratto di fase sarebbe l'insieme del punti di equilibrio e alcune traiettorie di fase scelte nel piano delle fasi (cfr. Fig. 2 destra).

Codice per fare i grafici di fase delle Fig. 1 e 2

```
clear; a=input('a ='); b=input('b = '); c=input('c = '); d=input('d = ');
x(1)=3; y(1)=1;
h=input('passo discretizzazione h =');
tmax=10;
nmax=floor(tmax/h);
t(1)=h;
for n=1:nmax-1,
t(n+1)=n*h;
x(n+1)=(1+a*h)*x(n)-b*h*x(n)*y(n);
y(n+1)=(1-d*h)*y(n)+c*h*x(n)*y(n);
end
figure(1)
plot(t,x,'r-',t,y,'b-')
title('Processo non-lineare di Lotka-Volterra'); axis tight
figure(2)
h1=1/(tmax); s=4;
[xx,yy]=meshgrid(t(1):s*h:tmax,t(1):s*h:tmax);
s=1; A=[]; B=[];
for k=1:length(xx),
for j=1:length(yy),
fuv=(yy(j,k)*(c*xx(1,k)-d))/(xx(1,k)*(a-b*yy(j,k)));
A=[xx(1,k)-h1,xx(1,k)+h1];
if abs(fuv*h1) ¿ h1
k1=fuv*h1/abs(10*fuv*h1);
else
k1=fuv*h1;
end
B=[yy(j,k)-k1,yy(j,k)+k1];
plot(A,B,'-');
hold on end

end plot(1,1,'r.'); hold off
```

Esempio 2 (1)

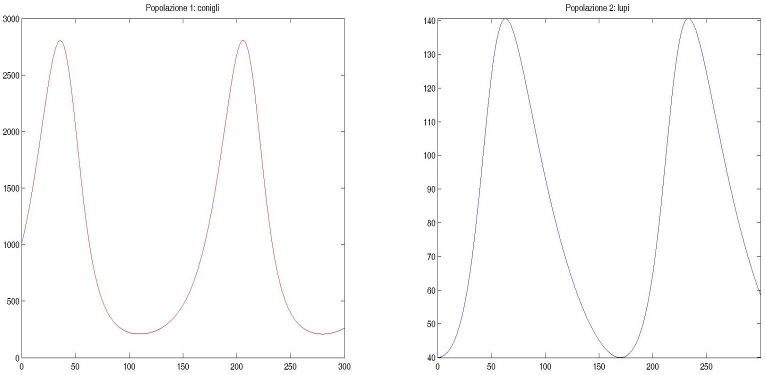

Figure: 3. Sistema di LV con $x_0 = 1000, y_0 = 40,\ a = 0.08, b = 0.001\ c = 0.00002,\ d = 0.02,$ $t_f = 300(tempofinale).$

Esempio 2 (2)

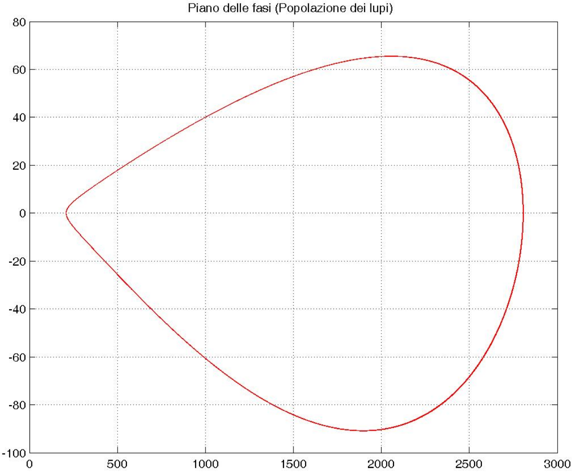

Figure: 4. Il piano delle fasi da cui si evince l'evoluzione lungo la traiettoria della popolazione dei lupi

Un modello più raffinato

- In assenza di predatori si può assumere che prede crescano secondo un modello logistico con capacità dell'ambiente pari a K.
- Il modello di Lotka-Volterra diventa

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right) - b\,x(t)\,y(t)) \quad (8)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = c\,x(t)y(t) - d\,y(t) \quad (9)$$

Un modello più raffinato

- In assenza di predatori si può assumere che prede crescano secondo un modello logistico con capacità dell'ambiente pari a K.
- Il modello di Lotka-Volterra diventa

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= a\,x(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right) - b\,x(t)\,y(t)) \qquad (8)\\
\frac{dy(t)}{dt} &= c\,x(t)y(t) - d\,y(t) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Esempio 3 (1)

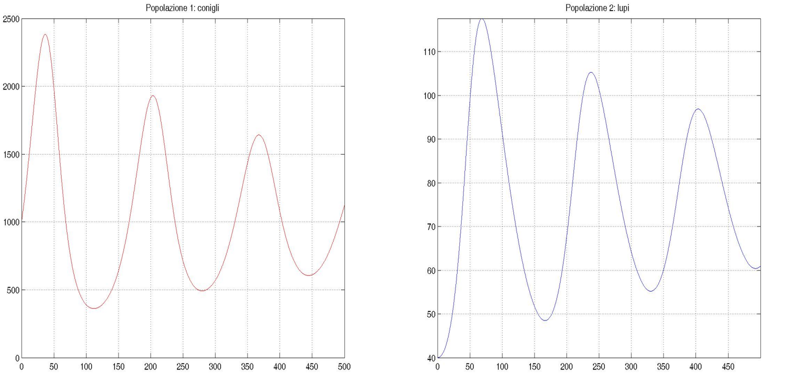

Figure: 5. Sistema di LV con
$x_0 = 1000, y_0 = 40,\ a = 0.08, b = 0.001\ c = 0.00002,\ d = 0.02,$
$K = 20000,\ t_f = 500(tempofinale).$

Esempio 3 (2)

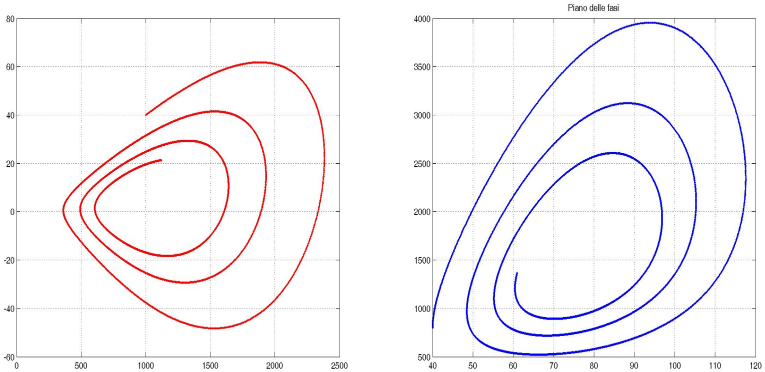

Figure: 6. Piano delle fasi