

Corso di Approssimazioni Numeriche, A.A. 2007/08

ESERCITAZIONE DI LABORATORIO SU:

Interpolazione con funzioni radiali di base

Prof. S. De Marchi - 12 marzo 2008

1 Stime dell'errore

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione nota su un insieme discreto $X = \{x_1, \dots, x_N\}$. Detta $s_{f,X}$ l'interpolante di f su X , ricordiamo che vale la seguente stima puntuale dell'errore

$$|f(x) - s_{f,X}(x)| \leq C P_{\Phi,X}(x), \quad (1)$$

dove $P_{\Phi,X}$ indica la *funzione potenza* che rappresenta, come nel caso dell'interpolazione polinomiale, la norma del funzionale dell'errore in x , la cui espressione esplicita, nel caso definito positivo, è

$$P_{\Phi,X}^2(x) = \Phi(0) - \mathbf{u}^T R_{\Phi,X}(x). \quad (2)$$

Le funzioni cardinali $\mathbf{u} = \{u_i(x), i = 1, \dots, N\}$, si ottengono risolvendo il sistema

$$A_{\Phi,X} \mathbf{u} = R_{\Phi,X},$$

dove $A_{\Phi,X} = (\phi(\|x_i - x_j\|))_{i,j=1,\dots,N}$ e il vettore $R_{\Phi,X}(x) = (\phi(\|x - x_1\|), \dots, \phi(\|x - x_N\|))^T$.

2 Esercitazione proposta

1. Costruire la funzione potenza associata ad una funzione radiale ϕ definita positiva ed a un insieme di valori X sul quadrato $\Omega = [-1, 1]^2$.
2. Si consideri ancora una volta la *funzione di Franke*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= .75 \exp[-((9x_1 - 2)^2 + (9x_2 - 2)^2)/4] + .75 \exp[-(9x_1 + 1)^2/49 - (9x_2 + 1)/10] \\ &+ .5 \exp[-((9x_1 - 7)^2 + (9x_2 - 3)^2)/4] - .2 \exp[-(9x_1 - 4)^2 - (9x_2 - 7)^2]; \end{aligned}$$

in $\Omega = [0, 1]^2$. Costruire l'interpolante con RBF Gaussiani e IMQ su una griglia $N = 20 \times 20$ sia di punti equispaziati che di Chebyshev. Si consideri il valore $\left\| \frac{f - s_{f,X}}{P_{\Phi,X}} \right\|_{\infty}$ come stima della costante C che appare in (1).

3. Si faccia anche vedere che $0 \leq P_{\Phi,X}^2(x) \leq \Phi(0)$ e che se $X \subseteq Y$ allora $P_{\Phi,X}^2(x) \geq P_{\Phi,Y}^2(x)$.

Tempo assegnato: 2 ore.

Per facilitare l'implementazione forniamo la funzione `phi.m`

```

function p=phi(r)
%-----
% input
% r=distance between points
%-----
global RBFtype
global c

switch RBFtype
    case 1
        p=1./sqrt(1+c*r.^2); %IMQ
    case 2
        p=exp(-c*r.^2); %GA
    case 3
        p=sqrt(1+c*r.^2); %MQ
    case 4
        p=(1+4*r).*max(0,(1-r).^4); %W2
    case 5
        p=r.^2.*log(r+eps); %TPS
end
return

```

3 Approfondimenti

1. Holger Wendland: *Scattered Data Approximation* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics - Vol. 17 Cambridge University Press, London, 2005.