Corso di Approssimazioni Numeriche, A.A. 2007/08

Esercitazione di laboratorio su:

Minimi quadrati pesati

Prof. S. De Marchi - 20 febbraio 2008

1 Generalità sul "data fitting" con minimi quadrati

Dati $n+1$ punti $(x_i, f_i), i = 0, ..., n$, ci si propone di trovare un polinomio di grado $m \leq n$ (in generale $m \ll n$) t.c. siano *minime* le deviazioni (errori) $p(x_i) - f_i, \;\; i = 0, ..., n$.

La soluzione si ricerca minimizzando il funzionale quadratico rispetto a tutti i polinomi p di grado m

$$E(p) = \sum_{i=0}^{n} |p(x_i) - f_i|^2 = \sum_{i=0}^{n} (p(x_i) - f_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \{a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m - f_i\}^2 \; . \tag{1}$$

Ora, il funzionale $E(p)$ è in effetti dipendente dai coefficienti del polinomio p, cioè $a_0, ..., a_m$, pertanto scriveremo $E(a_0, ..., a_m)$ per indicarne tale dipendenza.

Teorema 1. *Condizione necessaria affinchè si raggiunga il minimo è che*

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \;\; j = 0, ..., m \; . \tag{2}$$

Il sistema (2) si può riscrivere usando le cosidette (*equazioni normali*)

$$B\mathbf{a} = \mathbf{z} \; ,$$

con B matrice simmetrica $(m+1) \times (m+1)$, $b_{ij} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{i+j-2}$ e $\mathbf{z}$ vettore colonna $z_i = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i-1} f_j$, oppure ricorrendo alla decomposizione SVD della matrice rettangolare A le cui componenti sono $a_{i,j} = x_i^{j-1}, \; i = 1, ..., n+1, \;\; j = 1, ..., m+1$.

Teorema 2. *Se i punti $x_0, ..., x_n$ sono distinti e $m \leq n$ allora esiste ed è unico il polinomio p, $deg(p) \leq m$ tale che $E(p)$ è minimo. I coefficienti $a_0, ..., a_m$ sono determinati dalla soluzione del sistema (2).*

2 Minimi quadrati pesati

Il funzionale che ora si considera per ogni fissato x, è il seguente

$$E_x(p) = \sum_{i=0}^{n} w_i(x) \left[p(x_i) - f_i\right]^2$$

dove $w_i(x)$ sono `funzioni peso positive`. In inglese si chiamano *Moving Least-Squares*.

Le funzioni peso hanno le seguenti caratteristiche

- positive e (relativamente) grandi quando $|x_i - x| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$.
- Positive e (relativamente) piccole quando $|x_i - x| > \epsilon, \forall \epsilon > 0$.

Considerando il sistema (2), si avrà: $b_{ij} = \sum_{i=0}^{n} w_i(x) x_i^{i+j-2}$ e $z_i = \sum_{j=0}^{n} w_j(x) x_j^{i-1} f_j$.

Vale anche il seguente teorema:

Teorema 3. *Esiste un unico polinomio* $\hat{p} = \sum_{i=0}^{m} \hat{a}_i \, x^i$ *di grado* $\leq m$ *che minimizza il funzionale* $E_x(p)$

`Nota bene:` I coefficienti $\{\hat{a}_i\}$ dipendono da x. Ció implica che dovremo risolvere un sistema di equazioni normali per **ogni** punto x. Per tale motivo questo metodo si applica solo per valori `piccoli` di m.

2.1 Scelta delle funzioni peso $w_i(x)$

Consideriamo $\mathtt{e}^{-x^2}$, che è decrescente per $x \geq 0$.

Per un generico intervallo $[a, b]$ si può considerare $\mathtt{e}^{-\frac{x^2}{4(b-a)}}$. Perció delle `possibili` scelte sono:

$$w_i(x) = \exp\left\{ -\frac{(x - x_i)^2}{4(b-a)} \right\} ,$$

$$w_i(x) = \exp\left\{ -\frac{(x - x_i)^2}{50} \right\} ,$$

$$w_i(x) = \exp\left\{ -\frac{(x - x_i)^2}{20} \right\} .$$

o in generale

$$w_i(x) = \exp\left\{ -\alpha \, (x - x_i)^2 \right\} \ , \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{3}$$

3 Minimi quadrati pesati ed interpolanti

Si tratta di minimi quadrati pesati con l'ulteriore richiesta che la risultante curva `interpoli` i punti dati. In inglese si chiamano *Interpolating Moving Least-Squares.*

Ad esempio, se $w_i(x) = \exp\left\{ -\frac{(x-x_i)^2}{20} \right\}$ i pesi saranno "grandi" sui punti x vicini a x_i e "piccoli" su punti lontani. Perció il `trucco` è di prendere pesi che tendono a $+\infty$ in x_i.

Ciò suggerisce funzioni peso del tipo:

$$w_i(x) = \frac{1}{(x - x_i)^2}, \quad w_i(x) = \frac{1}{(x - x_i)^4}$$

oppure

$$w_i(x) = \frac{e^{-(x-x_i)^2}}{(x - x_i)^2} ,$$

(quest'ultima si comporta come $1/(x - x_i)^2$ in un intorno di x_i).

3.1 Criteri di scelta delle funzioni peso

1. in relazione alle ascisse maggiore o minore rapporto di "attenuazione";
2. interpolazione si o no;
3. natura della singolarità in $x = x_i$;
4. supporto locale .

La richiesta 4 è soddisfatta prendendo

$$w(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^k}\left(1 - \frac{|x|}{d}\right)^2 & |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases}$$

in tal caso $(-d, d)$ è il supporto e a è un parametro di scalatura.

Il supporto deve essere tale da contenere $m + 1$ punti e la curva approssimante $g(x)_{|[x-d,x+d]}$ può essere definita come un polinomio di grado m.

4 Schema di Shepard

Se si sceglie $m = 0$, si ottiene uno schema noto come `schema di Shepard`.

In tal caso le equazioni normali si riducono ad una solo equazione (da risolversi per ogni x!). Pertanto la soluzione, per ogni x sarà

$$a_0(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i(x) f_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i(x)} . \tag{4}$$

Se $w(x) = 1/x^k, k > 0$ allora Shepard provò che

(i) $0 < k < 1$ la curva interpolante ha una cuspide nei punti di interpolazione fuori è $\mathcal{C}^\infty$,

(ii) $k = 1$ la curva ha degli angoli nei punti x_i;

(iii) $k > 1$ essa è globalmente $\mathcal{C}^1$.

Se $g(x)$ è la risultante curva, in (i) e (ii) $g(x_i) = f_i$ (interpola) ma $g(x)$ non è differenziabile per $0 < k \leq 1$.

5 Esercitazione proposta

Si considerino i dati

```
x=[2 4 6 8 10 12];
y=[6.91 9.62 9.74 10.01 11.48 11.90];
```

1. Costruire l'approssimazione ai minimi quadrati pesati con grado $m = 1$ usando le funzioni peso $w_i(x) = \texttt{exp}(-\alpha(x - x_i)^2)$, al variare di $\alpha \in [-1, 1]$. Da un punto di vista implementativo conviene, per questo caso, costruire il vettore `w` che contiene i valori delle funzioni peso w_i nel generico punto x e le matrici `W=diag(w), V=[ones(length(x),1) x'];`. Pertanto, la matrice del sistema e il termine noto saranno `A=V'*W*V; b=V'*W*y'`.

2. Ripetere l' esercizio con lo schema di Shepard con funzione peso $w_i = 1/(x - x_i)^k$, $k \geq 0$.

`Tempo assegnato:` 2 ore.

6 Approffondimenti

Come riferimento bibliografico per futuri approffondimenti, suggerisco la seguente monografia *Curve and Surface Fitting* di Peter Lancaster and Kestutis alkauskas (1986).

```
clear;
%-----------------------------------------------------
%             Metodo di Shepard
%
% Data fitting con il metodo dei minimi quadrati
% con il metodo di Shepard
%
% Author: Stefano De Marchi - Universita‘ di Verona
% Date  : 20.2.2008
%
%-----------------------------------------------------
format long;
xd=[2 4 6 8 10 12];
fd=[6.91 7.62 9.74 10.01 11.48 11.90];
xmin=min(xd);
xmax=max(xd);

k1=input('Esponente k della funzione peso (k>0): ');

hh=(xmax-xmin)/500;
x=xmin:hh:xmax;


  for k=1:length(x),
  s=0;
  s1=0;
   for i=1:length(xd),
       if rem(k1,2)==1 & abs(x(k)-xd(i)) < hh,
         ww=1/hh;
           %ww=1/(abs(x(k)-xd(i))^k1);
       else
         ww=1/(abs(x(k)-xd(i))^k1);
       end
       s=s+ww*fd(i);
       s1=s1+ww;
   end;
  p(k)=s/s1;
 end;

 plot(xd,fd,'*',x,p);

 astr=num2str(k1);
 titlestring=['Metodo di Shepard, peso 1/(x-x_i)^k, k = ', astr];
 title(titlestring);
```


Table 1: Una possibile implementazione del metodo di Shepard.