Corso di Approssimazioni Numeriche, A.A. 2007/08

Esercitazione di laboratorio su:
relazione di ricorrenza per B-splines e *nucleo di Peano*
Prof. S. De Marchi - 23 gennaio 2008

1 B-splines e teorema del nucleo di Peano

1.1 B-splines

Le B-splines (o splines di base) soddisfano la relazione di ricorrenza

$$B_{i,l}(x) = \left(\frac{x_i - x}{x_{i+l} - x_i} + 1\right) B_{i+1,l-1}(x) + \left(\frac{x - x_i}{x_{i+l} - x_i}\right) B_{i,l-1}(x)\ , \quad 1 < l \le k \tag{1}$$

con $B_{i,1}(x) = 1, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$, che deriva dalla relazione di ricorrenza delle differenze divise applicata alla funzione *potenza troncata* $p(t; x) = (t - x)_+^{k-1}$ (vista come funzione di x).

1.2 Nucleo di Peano

Il risultato che verrà presentato è un *Teorema di rappresentazione* di funzionali lineari e continui definiti sulle funzioni di classe $C^{n+1}[a, b]$, ove $[a, b]$ è un generico intervallo della retta reale. Come riferimento bibliografico citiamo P. Davis, *Interpolation and Approximation*, §3.7, pp. 69-75.

Iniziamo la presentazione rifacendoci alla *forma di Chauchy* del resto della interpolazione polinomiale. Indicheremo con $p_n^f \in \mathbb{P}_n$ il polinomio interpolante la funzione f di grado $\le n$.

Teorema 1. *Sia $f(x) \in C^n[a, b]$ e si supponga che $f^{n+1}(x)$ esista in ogni $x \in (a, b)$. Se, $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$, allora*

$$R_n^f(x) = f(x) - p_n^f(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n) f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \tag{2}$$

dove $\min(x, x_0, ..., x_n) < \xi < \max(x, x_0, ..., x_n)$*. Il punto ξ dipende da $x, x_0, x_1, ..., x_n$ e f.*

Se quindi $f \in \mathbb{P}_n$ allora $R_n^f(x) \equiv 0$.

Possiamo quindi considerare per x fissato, il resto $R_n^f(x)$ come un funzionale lineare che opera su f e che si annulla sui polinomi di grado $\le n$. *Peano* osservò che **se un funzionale lineare ha questa proprietà** allora esso deve **rappresentarsi facilmente in termini di** $f^{(n+1)}$.

Consideriamo senza perdita di generalità funzioni di classe $C^{n+1}[a, b]$ e funzionali lineari definiti su di essa della forma seguente:

$$L(f) = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x) f^{(i)}(x)\right) dx + \sum_{i=1}^{j_0} b_{i_0} f(x_{i_0}) + \sum_{i=1}^{j_1} b_{i_1} f'(x_{i_1}) + ... + \sum_{i=1}^{j_n} b_{i_n} f^{(n)}(x_{i_n}). \tag{3}$$

Le funzioni $a_i(x)$ sono funzioni continue a tratti su $[a, b]$ e i punti x_{i_j} appartengono ad $[a, b]$.

Nel seguito considereremo la funzione $s(x) = (x-t)_+^n$ la funzione potenza troncata definita da

$$\begin{array}{ll} (x-t)_+^n = (x-t)^n & x \geq t \\ (x-t)_+^n = 0 & x < t \end{array}$$

Teorema 2 (Nucleo di Peano). *Sia $L(p) = 0$ per tutti i $p \in \mathbb{P}_n$. Allora, per ogni $f \in C^{n+1}[a,b]$ vale la rappresentazione*

$$L(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt, \tag{4}$$

dove

$$K(t) = \frac{1}{n!} L_x[(x-t)_+^n]. \tag{5}$$

La notazione $L_x[(x-t)_+^n]$ significa che il funzionale L è applicato a $(x-t)_+^n$ considerata come funzione della variabile x.

Dim. Vedasi il libro *Funzioni splines univariate* pp. 47 e ss. $\square$

Sappiamo dalla teoria sulle differenze divise, che se $f \in C^{n+1}[a,b]$ allora vale la relazione

$$f[x_0, x_1, ..., x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \textit{per qualche } \xi. \tag{6}$$

Pertanto, se $f \in \mathbb{P}_n$ allora $f[x_0, x_1, ..., x_{n+1}] = 0$. Dal Teorema di Peano possiamo ora dedurre la seguente relazione fra differenze divise e B-spline.

Teorema 3. *Se $f \in C^{n+1}[a,b]$ e se $\{x_i, \ i = 0, 1, ..., n+1\}$ è un insieme di punti distinti in $[a,b]$, allora l'equazione*

$$f[x_0, x_1, ..., x_{n+1}] = \frac{1}{n!} \int_a^b B(t) f^{(n+1)}(t) dt \tag{7}$$

è verificata se $B(\cdot)$ è la B-spline

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(t-x_i)_+^n}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n+1} (x_j - x_i)}, \quad a \leq t \leq b\,. \tag{8}$$

Dim. Come sopra $\square$.

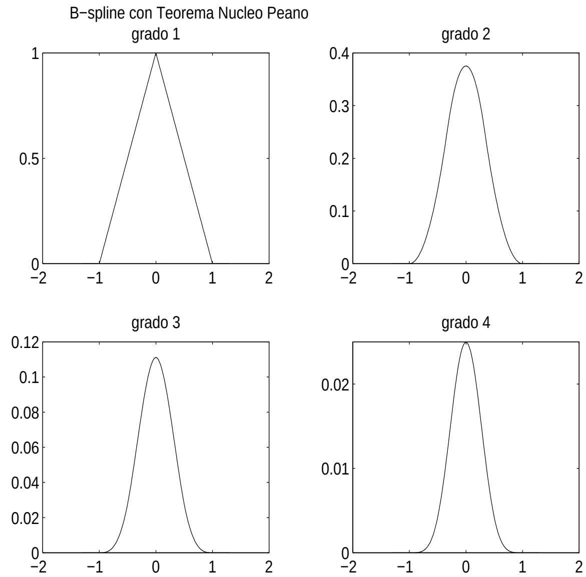

Figure 1: B-Spline di grado 1, 2, 3 e 4 su nodi equispaziati, ottenute come nucleo di Peano dell'operatore alle differenze divise

2 Esercitazione proposta

1. Data una partizione, equispaziata o meno, $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ di un intervallo $[a, b]$, costruire tutte le B-splines di ordine k prendendo i nodi x_0, x_n multipli con molteplicità pari all'ordine k.

2. Costruire un M-file che determina il nucleo di Peano associato alle differenze divise di ordine $n+1$ di una funzione in $\mathcal{C}^{n+1}[a, b]$. La funzione $K(t)$, si ottiene costruendo dapprima la B-Spline di grado n (ordine $n+1$), $B(t)$, mediante la (8), quindi dalla relazione

$$f[x_0, x_1, ..., x_{n+1}] = \frac{1}{n!} \int_a^b B(t) f^{n+1}(t) dt$$

   e dal teorema del nucleo di Peano, segue che $K(t) = \dfrac{B(t)}{n!}$.

Come al solito, per semplificare e accelerare le implementazioni, forniamo alcuni *utili* M-files.

```
function [y] = bspline(k,ind,x,p)
%Questa funzione calcola la ind-esima B-spline di ordine k
%sul vettore dei nodi x nel punto p voluto

%per la continuita' a dx dell'intervallo
if(p == x(length(x)) & ind==(length(x)-k))
```

```
   y=1;
   return
end

%inizio della relazione di ricorrenza
if k==1
   if (x(ind) <= p & x(ind+1) > p )
      y=1;
      return
   else
      y=0;
      return
   end
end

%correzione per rimediare all'annullamento del denominatore
if (x(ind+k-1)-x(ind))==0
   div1=0;
else
   div1=(p-x(ind))/(x(ind+k-1)-x(ind));
end

%correzione per rimediare all'annullamento del denominatore
if (x(ind+k)-x(ind+1))== 0
   div2=0;
else
   div2=(x(ind+k)-p)/(x(ind+k)-x(ind+1));
end

%ricorrenza per le B-spline
y= div1 * bspline(k-1,ind,x,p) + div2 * bspline(k-1,ind+1,x,p);
```

`Tempo assegnato:` 2 ore.

3 Approffondimenti

Indichiamo alcuni importanti riferimenti per poter approffondire e ampliare la conoscenza degli argomenti trattati nell'esercitazione.

3.1 Splines

Una pietra miliare per quanto concerne la teoria delle funzioni splines polinomiali è il libro di Carl de Boor *A Practical Guide to Splines* (revised edition) 2001. De Boor, a buona ragione, è il matematico che più di ogni altro ha lavorato sulle splines, sia unidimensionali che multidimensionali. Per una lista completa di riferimenti sulle splines, nella pagina web di de Boor http://pages.cs.wisc.edu/∼deboor/ si trova un link alla *biblografia sulle splines*, una sorta di database di articoli scientifici sulle splines.

3.2 Nucleo di Peano

Il teorema di rappresentazione di Peano è uno dei teoremi più importanti dell'analisi funzionale con ampie ricadute nell'analisi numerica. C'è un importantissimo riferimento che vale la pena citare: Artur Sard *Linear Approximation*, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1963). Il libro si sviluppa per gran parte attorno al teorema di Peano, enucleandone tutte le possibile applicazioni che fanno uso di approssimazioni lineari sia in spazi di dimensione finita che infinita, normati e non.