

*LEZIONE 1*

Spazio delle  
**SPLINE POLINOMIALI UNIVARIATE**

## Proprietà di $IP_m$

- $IP_m$  ha dimensione finita e base  $\{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$  ( $m =$  ordine).
- I polinomi sono funzioni regolari (anche fin troppo, sono  $C^\infty$ ).
- Sono facili da memorizzare (basta il vettore  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$  e da valutare (ad esempio usando lo schema di Hörner).
- Le derivate di un polinomio sono ancora polinomi e i coefficienti sono ottenibili algebricamente.
- Il numero degli zeri è  $\leq m - 1$ .

- Le matrici che sorgono in problemi di interpolazione ( di *Vandermonde*) o di approssimazione( di *Gram* per i minimi quadrati) sono sempre *non singolari*.
- Se  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  ,  $\exists p \in IP_m$ , t.c.  $\|f - p\|_\infty \leq \epsilon$ ,  $\forall \epsilon$  (Weierstraß).
- Si possono determinare precisi ordini di convergenza per l'approssimazione di funzioni regolari con polinomi (vedi Sezione 1 della dispensa).

## **Difetto**

Il *fenomeno di Runge* però rende i polinomi *inflessibili*.

### **Teorema 1. (Jackson)**

Se  $g \in C^r[a, b]$  e  $n > r + 1$  allora

$$\|g - p\|_{\infty} \leq C_r \left( \frac{b - a}{n - 1} \right)^r \omega \left( g^{(r)}; \frac{b - a}{2(n - 1 - r)} \right), \quad (1)$$

ove  $C_r = \frac{6(3e)^r}{r+1}$ .

Caso particolare:  $r = 0$ ;  $g \in C[-1, 1]$  allora

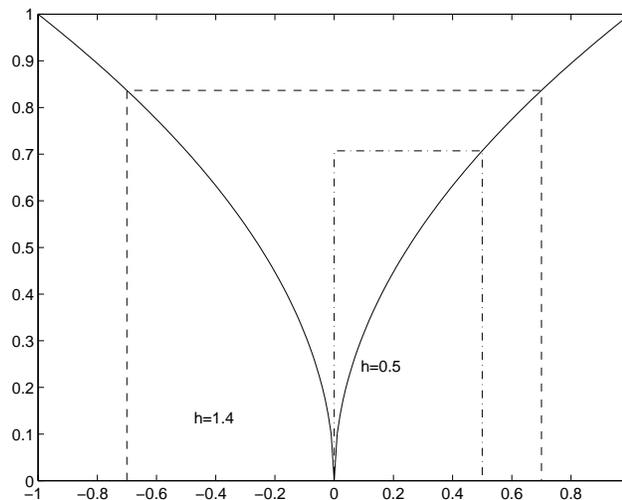
$$\|g - p\| \leq 6\omega\left(g; \frac{1}{n-1}\right). \quad (2)$$

**Esempio 1.** Consideriamo,  $g(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in [-1, 1]$ .  $\omega(g; h)$  si ottiene quando 0 sta sul bordo del rettangolo di base  $h$  e altezza  $\sqrt{h}$ .  
Perciò

$$\max_{|x-y| \leq h} \{|g(x) - g(y)|\} = |g(0) - g(h)| = \sqrt{h} = \omega(h; \sqrt{|x|}) .$$

Usando il teorema di Jackson per  $r = 0$  si ottiene la stima

$$\|g - p\| \leq C \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad (n = \text{ordine}).$$



Modulo di continuità in  $[-1, 1]$  di  $\sqrt{|x|}$ .

Dal teorema di Jackson, si suggerisce di usare o polinomi di grado elevato (sconsigliato per Runge) o di suddividere l'intervallo in più parti e di usare polinomi di grado *limitatamente basso* su intervallini più piccoli.

**Definizione 1.** Sia  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$  una partizione  $\Delta = \{x_0, \dots, x_{k+1}\}$  di  $[a, b]$  in  $k+1$  sottointervalli  $I_i = [x_i, x_{i+1}[$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ ,  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ .

Dato  $m > 0$  indicheremo con

$$\mathcal{P}IP_m(\Delta) = \{p : \exists p_0, \dots, p_k \in IP_m$$

$$t.c. p(x) = p_j(x), x \in I_j, j = 0, 1, \dots, k\},$$

lo spazio dei *polinomi continui a tratti* di ordine  $m$  con nodi  $x_0, \dots, x_{k+1}$ .

**Definizione 2.** (Schumaker) Sia  $\Delta$  una partizione di  $[a, b]$  ed  $m \in \mathbb{N}$ . Lo spazio delle funzioni spline polinomiali è

$$S_m(\Delta) = \mathcal{PIP}_m(\Delta) \cap C^{m-2}[a, b] .$$

Ovvero polinomi a tratti di ordine  $m$  con nodi *semplici* nei punti interni  $x_1, \dots, x_k$ .

### **Osservazioni sul nome 'splines'**

□ Una spline è un dispositivo meccanico per tracciare curve. È una barra flessibile e sottile di legno o di qualche altro materiale elastico che posta sul foglio su cui disegnare viene “vincolata” su dei punti per mezzo di oggetti pesanti detti *cani* o *ratti*, tali che la spline assume la forma della curva che si desidera disegnare (vedi la raccolta dei lavori di I. Schoenberg di de Boor).

□ Polinomi continui a tratti e splines sono spesso usati come sinonimi.

*Generalizziamo la definizione 2 al caso di nodi interni multipli.*

Indicheremo con  $\mathcal{M} = (m_1, \dots, m_k)$   $1 \leq m_i \leq m$ ,  $i = 1, \dots, k$  il vettore delle molteplicità corrispondente ai nodi interni della partizione  $\Delta$ .

**Definizione 3.**

$$S(IP_m; \mathcal{M}; \Delta) = \{ s : \exists s_0, \dots, s_k \in IP_m \mid$$

$$s(x) = s_i(x), x \in I_i, i=0,1,\dots,k$$

$$D^j s_{i-1}(x_i) = D^j s_i(x_i),$$

$$j=0,1,\dots,m-1-m_i, \quad i=1,\dots,k \}$$

*è lo spazio delle spline polinomiali di ordine  $m$  con nodi (interni)  $x_1, \dots, x_k$  di molteplicità  $m_1, \dots, m_k$  rispettivamente.*

Il vettore  $\mathcal{M}$  controlla la natura dello spazio  $S(IP_m; \mathcal{M}; \Delta)$ , controllando la regolarità della spline nei nodi.

- Se  $m_i = m, \forall i$ , allora  $s_{i-1}(x)$  e  $s_i(x)$  **non** sono collegate in  $x_i$ .
- Se  $m_i < m$ , allora  $s_{i-1}(x)$  e  $s_i(x)$  sono obbligati a passare per il punto  $x_i$ . Ma non solo, la generica spline e le sue derivate  $m - 1 - m_i$  sono continue sui nodi interni.

$\mathcal{M} = (m, \dots, m)$ . Allora  $S(IP_m; \mathcal{M}; \Delta) = \mathcal{P}IP_m(\Delta)$ .

$\mathcal{M} = (1, \dots, 1)$ . Allora  $S(IP_m; \mathcal{M}; \Delta) = S_m(\Delta)$ , dove  $S_m(\Delta)$  è lo spazio delle spline di ordine  $m$  con nodi semplici. Questo ci dice che lo spazio delle spline polinomiali di ordine  $m$  è un sottinsieme di  $C^{m-2}[a, b]$ . È lo spazio dei polinomi a tratti di ordine  $m$  *più regolare* con nodi semplici nei punti  $x_1, \dots, x_k$ .

**Teorema 2.** (Dimensione)

*Sia  $K = \sum_{i=1}^k m_i$ , allora  $S(IP_m; \mathcal{M}; \Delta)$  è uno spazio lineare di dimensione  $m + K$ .*



Ciascun blocco  $A_i$  ha dimensione  $(m - m_i) \times m$  e la forma seguente:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2/2 & \dots & \dots & x_i^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & x_i & \dots & \dots & x_i^{m-2}/(m-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & x_i^{m_i}/m_i! \end{bmatrix} .$$

Infatti, imponendo le condizioni di continuità sul nodo  $i$ -esimo

$$D^j s_{i-1}(x_i) = D^j s_i(x_i) \quad j=0,1,\dots,m-1-m_i, \quad i=1,\dots,k ,$$

si ha

$$D^j \left( \sum_{k=1}^m c_{i-1,k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \right) \Big|_{x=x_i} - D^j \left( \sum_{k=1}^m c_{i,k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \right) \Big|_{x=x_i} = 0 .$$

Infine,  $\text{rango}(A) = \sum_{i=1}^k (m - m_i)$ . Poichè

$$A : \mathbb{R}^{m(k+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^k (m - m_i)} ,$$

segue che  $\ker(A) = m(k+1) - \sum_{i=1}^k (m - m_i) = m + \sum_{i=1}^k m_i = m + K$ .  $\square$



Nel caso di nodi semplici (cioè  $\mathcal{M} = (1, 1, \dots, 1)$ ) allora  $\dim S_m(\Delta) = m + k$ .

Osservando che  $IP_m \subset S(IP_m; \mathcal{M}; \Delta)$ , una base per  $S$  deve includere almeno una base per  $IP_m$ .

Le funzioni  $1, x - a, \dots, (x - a)^{m-1}$  sono dei candidati. Dobbiamo trovare altri  $K$  elementi. Faremo uso della funzione “potenza troncata” (vista come funzione di  $x$ ):

$$t(x; y) = (x - y)_+^j = (x - y)^j (x - y)_+^0,$$

ove

$$(x - y)_+^0 = \begin{cases} 0 & x < y \\ 1 & x \geq y \end{cases}.$$

### **Teorema 3.** (base per $S(IP_m; \mathcal{M}; \Delta)$ )

*Le funzioni*

$$\sigma_{i,j}(x) = (x - x_i)_+^{m-j} \quad j=1, \dots, m_i, \quad i=0, 1, \dots, k \quad (3)$$

*con  $x_0 = a$  e  $m_0 = m$ , formano una base per  $S(IP_m; \mathcal{M}; \Delta)$ .*

**Dim.** (alcune idee)

Esse sono esattamente  $m + K$  (infatti sono  $m_0 + \sum_{i=1}^k m_i = m + K$ .) Rimane da verificare che sono linearmente indipendenti.

Per assurdo, sia  $x \in I_i$  e che per qualche insieme  $\{c_{i,j}\}$ ,  $s(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} (x - x_i)_+^{m-j}$  sia identicamente nulla su  $[a, b]$ . Proviamo che i coeff. sono nulli.

Se  $x \in I_0$ , da  $\sum_{j=1}^m c_{0,j} (x - x_0)^{m-j} = 0$  e la lineare indipendenza della funzione  $(x - x_0)^{m-j}$  si conclude che  $c_{0,1} = c_{0,2} = \dots = c_{0,m} = 0$ . Analogamente per  $x \in I_j$  si ha  $c_{j,1} = c_{j,2} = \dots = c_{j,m} = 0$ .  $\square$

**Esempio 2.** Consideriamo,  $[a, b] = [0, 5]$ ,  $\Delta = \{1, 2.77, 3.5, 4.7\}$ ,  $m = 3$  (spline quadra.) e  $\mathcal{M} = (1, 1, 1, 1)$ . Ora essendo  $a = 0$  e  $m_0 = 3$ , i primi tre elementi della base sono  $(x-0)_+^0, (x-0)_+^1, (x-0)_+^2$ . Perciò la base è composta da 7 elementi:

$$\begin{array}{ccc} (x-0)_+^0 & (x-0)_+^1 & (x-0)_+^2 \\ (x-1)_+^2 & (x-2.77)_+^2 & (x-3.5)_+^2 \\ & & (x-4.7)_+^2 \end{array}$$

**Osservazione.** La base (3) non è opportuna per applicazioni numeriche. Infatti per valutare  $s(x)$  per  $x$  vicino a  $b$  è necessario valutare tutte le funzioni di base e farne la somma. Per questa ragione sono state definite le *B-Spline* che invece sono a base simmetrica e a supporto locale.

## Notazioni.

Abbiamo indicato con  $S_m(\Delta)$  lo spazio delle spline polinomiali di ordine  $m$  sulla partizione  $\Delta$ ,  $m \geq 1$ . Alcuni spazi di spline interessanti e spesso usati nelle applicazioni sono:

$S_1(\Delta)$  : sono le spline costanti a tratti;

$S_2(\Delta)$  : sono le spline lineari;

$S_3(\Delta)$  : sono le spline quadratiche;

$S_4(\Delta)$  : sono le spline cubiche.

Naturalmente se  $\Delta$  è fissata, si potrà scrivere semplicemente  $S_m$ .

## *LEZIONE 2*

### **B-Splines** o funzioni splines di Base

Sia  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (o  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ ) una sequenza finita (o infinita) crescente di numeri reali ( $x_i < x_{i+1}$ ), detti *nodi* che per ora assumiamo distinti.

**Definizione 4.** *La  $i$ -esima B-Spline di ordine  $k$ , che si indica con  $B(x; x_i, \dots, x_{i+k})$  (grado  $k - 1$ ) con nodi  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$  è la  $k$ -esima differenza divisa della funzione  $p(t, x) = (t - x)_+^{k-1}$  ovvero*

$$B(x; x_i, \dots, x_{i+k}) = (x_{i+k} - x_i) p[x_i, \dots, x_{i+k}](x), \quad (4)$$

dove  $p[\cdot](x)$  rappresenta la  $k -$ esima differenza divisa sui punti  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$  della funzione  $p(\cdot, x)$  vista come funzione di  $x$  (a  $t$  verrà sostituito di volta in volta uno dei nodi  $x_i$ ).

Per capire meglio, farsi l'esempio nel caso di  $k = 2$  (B-splines lineari).

Facciamo alcune importanti osservazioni.

1. La definizione 4 è una *buona* definizione. Infatti se  $x = x_j$  per qualche  $j$  allora si definisce  $B_{i,k}(x_j) = \lim_{x \rightarrow x_j^+} B_{i,k}(x)$  rendendo così le B-Spline *continue a destra*.

Naturalmente le B-Spline sono funzioni spline.

2. Ricordando che

$$p[x_i, \dots, x_{i+k}](x) = \sum_{j=i}^{i+k} a_j (x_j - x)_+^{k-1}, \quad (5)$$

con  $a_j = \prod_{k=i, k \neq j}^{i+k} \frac{1}{x_k - x_j}$ . Quindi la B-Spline è un polinomio continuo a tratti di grado  $k-1$  e appartenente a  $C^{k-2}(\mathbb{R})$ .

**Proposizione 1.** (*Proprietà*)

(i)  $B_{i,k}(x) = 0$  se  $x \notin [x_i, x_{i+k}]$ .

(ii)  $B_{i,k} > 0$  nel suo supporto  $(x_i, x_{i+k})$  (\*).

(iii)  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_{i,k}(x) = 1$  o equivalentemente  $\int_{\mathbb{R}} B_{i,k}(x) dx = 1$ .

(\*) Vedi nota a pagina seguente.

Agli estremi di  $(x_i, x_{i+k})$  la B-spline di ordine  $k$  vale:

1. In  $x_i$

$$\begin{cases} (-1)^{j+k-\alpha_i} D_+^j B_{i,k}(x_i) = 0 & j=0,1,\dots,k-1-\alpha_i \\ > 0 & j=k-\alpha_i,\dots,k-1 \end{cases}$$

2. In  $x_{i+k}$

$$\begin{cases} (-1)^{k-\beta_{i+k}} D_-^j B_{i,k}(x_{i+k}) = 0 & j=0,1,\dots,k-1-\beta_{i+k} \\ > 0 & j=k-\beta_{i+k},\dots,k-1 \end{cases}$$

Con  $\alpha_i = \max\{l : x_i = \dots = x_{i+l-1}\}$  (punti uguali a  $x_i$ ) e  $\beta_{i+k} = \max\{l : x_{i+k} = \dots = x_{i+k-l+1}\}$  (punti uguali a  $x_{i+k}$ ).

**Dim.** (i) Sia  $x \notin \text{Supp}(B_{i,k})$ ,  $x$  fissato.  $p(t, x)$  è  $(t - x)^{k-1} \in IP_{k-1}$  se  $x < x_i$  e zero per  $x > x_{i+k}$ . Perciò la  $k$ -esima differenza divisa è zero. Cioè  $B_{i,k} = 0$ .

(ii) Per induzione su  $k$ .

$B_{i,1} = 1$  se  $x \in (x_i, x_{i+1})$  e 0 altrimenti. Quindi la cosa è vera per  $k = 1$ .  $k \geq 2$  e  $x \in (x_i, x_{i+k})$ . Considero  $g(t) = p(t, x)$  come funzione di  $t$ . Allora  $B_{i,k}(x)$ , coincide con il coefficiente di  $t^k$  nel polinomio di Lagrange (in forma di Newton) interpolante  $g$  nei nodi  $x_i, \dots, x_{i+k}$ . Sia  $L_k(t)$  questo polinomio. Ora,  $L_k(t) \neq 0$  e  $L_k(t) \neq (t - x)^{k-1}$ . Inoltre  $L_k(t) - g(t)$  ha  $k + 1$  zeri distinti nei punti  $x_i, \dots, x_{i+k}$ . Perciò  $L_k^{(k-1)}(t) - g^{(k-1)}(t)$  ha due cambiamenti di segno in  $(x_i, x_{i+k})$ . Ma  $g^{(k-1)}(t) = 0$ ,  $t < x$  e  $g^{(k-1)}(t) = (k - 1)!$ ,  $t \geq x$  e  $L_k^{(k-1)}(t) = At + B$ ,  $A = B_{i,k}(x)k!$ . Per avere 2 cambi di segno allora  $A > 0$ ;  $B_{i,k}(x) > 0$  come richiesto.

(iii) Sia  $j$  l'indice t.c.  $x \in [x_j, x_{j+1})$  e  $x \neq x_j$ , allora basta considerare la somma  $\sum_{i=j-k+1}^j B_{i,k}(x)$ . Ricordando

$$p[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{p[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - p[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i},$$

si ha

$$B_{i,k}(x) = p[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}](x) - p[x_i, \dots, x_{i+k-1}](x)$$

Perciò in

$$\begin{aligned} & \sum_{i=j-k+1}^j B_{i,k}(x) = \\ & = \sum_{i=j-k+1}^j (p[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}](x) - p[x_i, \dots, x_{i+k-1}](x)), \end{aligned}$$

rimane solo il primo e l'ultimo termine

$$p[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}](x) - p[x_{j-k+1}, \dots, x_j](x) = 1 - 0 = 1.$$

Per la continuità a destra delle differenze divise si ha che anche per  $x = x_j$  vale la (iii).  $\square$

## Osservazioni

- Una sequenza di funzioni non negative che soddisfa la proprietà (iii) è detta una *partizione dell'unità*.
- Si è già visto che  $\{x^i, i = 0, \dots, k - 1\}$  e  $\{(x - x_j)_+^{k-1}, j = 1, \dots, n\}$  sono una base per lo spazio delle spline di ordine  $k$ . Questa base però è *mal condizionata*. Per questo si usa rappresentare le spline come combinazione di B-Splines.

**Teorema 4.** *Le B-spline  $B_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n + k$  formano una base per lo spazio delle spline di grado  $k-1$ ,  $\mathcal{S}(k - 1; x_1, \dots, x_n)$  su  $[a, b]$ .*

**Lemma 1.** *Una funzione  $s \in \mathcal{S}(k-1; x_1, \dots, x_n)$  è una spline se e solo se*

$$s(x) = p_{k-1}(x) + \sum_{j=1}^n a_j (x - x_j)_+^{k-1}, \quad (6)$$

dove  $p_{k-1}(x)$  è un polinomio di grado  $\leq k - 1$ .

Una conseguenza del Lemma 1 è la caratterizzazione di una *spline naturale*, ovvero di una spline di grado  $2k - 1$  che è un polinomio di grado  $\leq k - 1$  in  $[a, x_1] \cup [x_n, b]$  e t.c.  $s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0$ ,  $j = k, \dots, 2k - 2$ .

**Corollario 1.**  *$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una spline naturale di grado  $2k - 1$  con nodi  $x_1, \dots, x_n$  se e solo se*

$$s(x) = p_{k-1}(x) + \sum_{j=1}^n a_j (x - x_j)_+^{2k-1},$$

dove  $p_{k-1} \in IP_{k-1}$  e  $\sum_{j=1}^n a_j x_j^i = 0$ ,  $i = 0, \dots, k - 1$ .

**Lemma 2.** *Sia  $s$  una spline in  $\mathcal{S}(k-1; x_1, \dots, x_n)$ . Se  $s(x) = 0$  per ogni  $x \notin [x_1, x_k]$  allora  $s(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .*

**Lemma 3.** *Le B-Spline  $B_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  definite come nel Teorema 4 sono linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}$ .*

## Relazione di ricorrenza per B-Spline

Si basa sulla *regola di Steffensen* per la differenza divisa del prodotto di due funzioni  $f$  e  $g$ .

**Proposizione 2.** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni sufficientemente differenziabili e i punti  $x_1 \leq \dots \leq x_{n+1}$  siano dati. Allora*

$$(f \cdot g)[x_1, \dots, x_{n+1}] = \sum_{j=1}^{n+1} f[x_1, \dots, x_j]g[x_j, \dots, x_{n+1}] \quad (7)$$

Consideriamo *B-Spline non normalizzate* di ordine  $k$  sui nodi  $\{x_i, \dots, x_{i+k}\}$

$$N_{i,k}(x) = \frac{B_{i,k}(x)}{x_{i+k} - x_i} .$$

Poniamo

$$(t - x)_+^{k-1} = (f \cdot g)(t)$$

dove  $f(t) = t - x$  e  $g(t) = (t - x)_+^{k-2}$ .

Ora

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{x_{i+1} - x - x_i + x}{x_{i+1} - x_i} = 1$$

e le differenze divise di ordine superiore al primo di  $f$  sono nulle.

## Perci6

$$\begin{aligned}
 N_{i,k}(x) &= (f \cdot g)[x_i, \dots, x_{i+k}] \\
 &= \sum_{j=0}^k f[x_i, \dots, x_{i+j}]g[x_{i+j}, \dots, x_{i+k}] \\
 &= f(x_i)g[x_i, \dots, x_{i+k}] + \\
 &+ f[x_i, x_{i+1}]g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] \\
 &= f(x_i) \frac{g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - g[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} + \\
 &+ g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \\
 &= \left( \frac{x_i - x}{x_{i+k} - x_i} + 1 \right) g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - \\
 &- \left( \frac{x_i - x}{x_{i+k} - x_i} \right) g[x_i, \dots, x_{i+k-1}] .
 \end{aligned}$$

Concludendo la relazione richiesta è

$$N_{i,k}(x) = \left( \frac{x_i - x}{x_{i+k} - x_i} + 1 \right) N_{i+1,k-1}(x) + \quad (8)$$

$$+ \left( \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} \right) N_{i,k-1}(x) . \quad (9)$$

Moltiplicando in (8) e (9) per  $x_{i+k} - x_i$  si ha la relazione equivalente per B-spline non normalizzate

$$B_{i,k}(x) = \left( \frac{x - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} \right) B_{i,k-1}(x) + \quad (10)$$

$$+ \left( \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_{i+1}} \right) B_{i+1,k-1}(x) \quad (11)$$

## Algoritmo 1

Dato  $x$ , determinare  $j$  t.c.  $x \in [x_j, x_{j+1}[$

1. Se  $(i \leq j - k)$  o  $(i > j) \implies B_{i,k}(x) = 0$   
perchè  $x \notin [x_{j-k}, x_j]$  che è il supporto  
di  $B_{j,k}$ ;
2. altrimenti, usa (10)+(11) per il calcolo  
di  $B_{i,k}$ .

**Esempio 3.** *Supponiamo che  $k = 5$  (grado 4) e  $x \in [x_j, x_{j+1}[$ . Allora le B-splines  $B_{i,5}$ ,  $i = j - k, \dots, j$  sono diverse da zero in  $x$ .*

$B_{i,1} = 0$	$B_{i,2} = 0$	$B_{i,3} = 0$	$B_{i,4}$	$B_{i,5}$
$B_{i+1,1} = 0$	$B_{i+1,2} = 0$	$B_{i+1,3}$	$B_{i+1,4}$	
$B_{i+2,1} = 0$	$B_{i+2,2}$	$B_{i+2,3}$		
$B_{i+3,1} = 1$	$B_{i+3,2}$			
$B_{i+4,1} = 0$				

La relazione di ricorrenza ci suggerisce la seguente ulteriore proprietà.

**(iv) Una spline è una combinazione convessa dei suoi coefficienti B-spline.**

Se  $s(x) = \sum_i c_i B_{i,m}(x)$  è una spline di ordine  $m$ . Sia  $x \in [x_j, x_{j+1}[$  allora ci sono  $m$  B-splines diverse da zero in  $x$  e  $s(x)$  è una combinazione convessa dei coefficienti  $c_{j-m+1}, \dots, c_j$ .

Inoltre

$$\min_i c_i \leq s(x) \leq \max_i c_i \quad (12)$$

**Dim.** Che sia una combinazione convessa deriva dal fatto che le B-spline sono non negative e formano una partizione d'unità. Perciò per calcolare una spline si faranno delle combinazioni convesse (delle medie pesate) che sono numericamente stabili!

La relazione (12) si prova usando il seguente lemma:

**Lemma 4.** *Se  $a = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ , per  $n$  numeri positivi  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tali che  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , allora*

$$\min_i a_i \leq a \leq \max_i a_i .$$

*(con il segno '=' valido se e solo se  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .)*

Perciò identificando  $a_i$  con  $c_i$  e  $x_i$  con le  $B_{i,m}(x)$  si conclude.

## I polinomi di Bernstein

Si consideri l'intervallo  $[a, b] = [0, 1]$ . Sia inoltre  $k$  (grado) fissato. La base di B-spline sulla sequenza di nodi

$$\begin{aligned}t_0 &= \dots = t_k = 0 \\t_{k+1} &= \dots = t_{2k+1} = 1 ,\end{aligned}$$

$B_{i,k}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$  sono polinomi di grado  $k$  su  $[0,1]$  che verificano la ricorrenza:

$$B_{i,k}(x) = xB_{i,k-1}(x) + (1-x)B_{i+1,k-1}(x) , \quad (13)$$

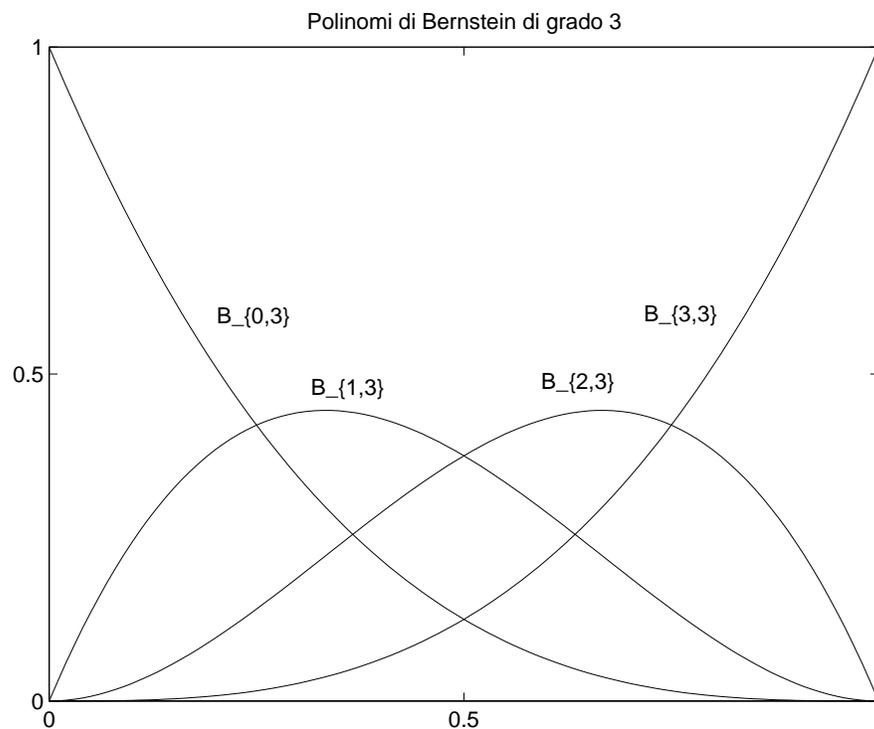
che è quella delle B-spline con le opportune sostituzioni. I polinomi (13) sono detti *Polinomi di Bernstein* di grado  $k$ .

Essi verranno denotati con  $B_i^k(x)$ .

### Proposizione 3.

$$B_i^k(x) = \binom{k}{i} (1-x)^{k-i} x^i, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

**Dim.** Usando la relazione di ricorrenza per B-spline, opportunamente adattata  $\square$



Polinomi di Bernstein di grado 3.

## Proposizione 4. (Proprietà dei polinomi di Bernstein)

1.  $B_i^k$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$  sono una base per  $IP_k$ .

2.  $B_i^k \geq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ .

3.  $\sum_{i=0}^k B_i^k = 1$  (partizione dell'unità).

4. Posto  $f(x) = \sum_{i=0}^k a_i B_i^k(x)$  si ha  $V(f) \leq V(\mathbf{a})$  (variation-diminishing).

5.

$$(B_i^k)' = k(B_{i-1}^{k-1} - B_i^{k-1}).$$

6. Per ogni  $x \in [0, 1]$ ,

$$B_i^k(x) = B_{k-i}^k(1-x), \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

**Dim.** Seguono dalle corrispondenti proprietà per B-spline, eccetto l'ultima.  $\square$

I polinomi di Bernstein consentono di dare una dimostrazione del *Teorema di Weierstraß* sulla migliore approssimazione in norma uniforme. Anzi il teorema di Weierstraß è un corollario di un teorema di Bernstein (vedi libro Lorentz).

Indicando con

$$B_n^f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

il polinomio di Bernstein di ordine  $n$  approssimante  $f$  su  $[0,1]$ , Bernstein provò

**Teorema 5.** *Per una funzione  $f(x)$  limitata su  $[0,1]$ , la relazione*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^f(x) = f(x)$$

*vale su ciascun punto di continuità  $x$  per  $f$ . Se inoltre  $f$  è continua su  $[0,1]$  allora tale relazione vale uniformemente.*

## *LEZIONE 3*

# **Algoritmi di calcolo e altre proprietà delle B-Splines**

## Algoritmi di Calcolo

Indicheremo con  $n$  la dimensione dello spazio delle B-Spline di ordine  $m$ , definite sui nodi  $\{t_0, \underbrace{t_1, \dots, t_k}, t_{k+1}\}$  cosicchè

$$n = m + \sum_{i=1}^k m_i = m + K .$$

Allora la generica spline di ordine  $m$  (grado  $m - 1$ ) si scriverà

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_{i,m}(x) , \quad (14)$$

con nodi multipli agli estremi dell'intervallo  $[a,b]$ , ovvero  $t_0 \leq \dots \leq t_m \leq a$  e  $b \geq t_n \geq \dots \geq t_{n+m}$ .

Gli algoritmi che descriveremo sono:

- (i) Algoritmo di valutazione di *Cox-de Boor* (o di *De Casteljau* nel caso di curve B-Spline);
  
- (ii) Algoritmo di derivazione;
  
- (iii) Algoritmo di inserimento di un nodo (“knot-insertion algorithm”) di *Böhm* (detto di *Oslo* nel caso di più nodi).

## Algoritmo di Valutazione

Sia  $x \geq t_m$  e  $S(x)$  sia espressa come in (14).

Allora

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 B_{i,m}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^1 B_{i,m-1}(x) = \dots \\
 &\dots = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^m B_{i,1}(x) \quad ,
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases}
 a_i^0 &= a_i \quad , \\
 a_i^{r+1} &= \omega_{i,m-r}(x) a_i^r + \\
 &+ (1 - \omega_{i,m-r}(x)) a_{i-1}^r(x) \quad r=0, \dots, m-1.
 \end{cases}$$

dove

$$\omega_{i,r} = \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+r}-t_i} & t_i < t_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In pratica si fa uso della relazione di ricorrenza per B-spline.

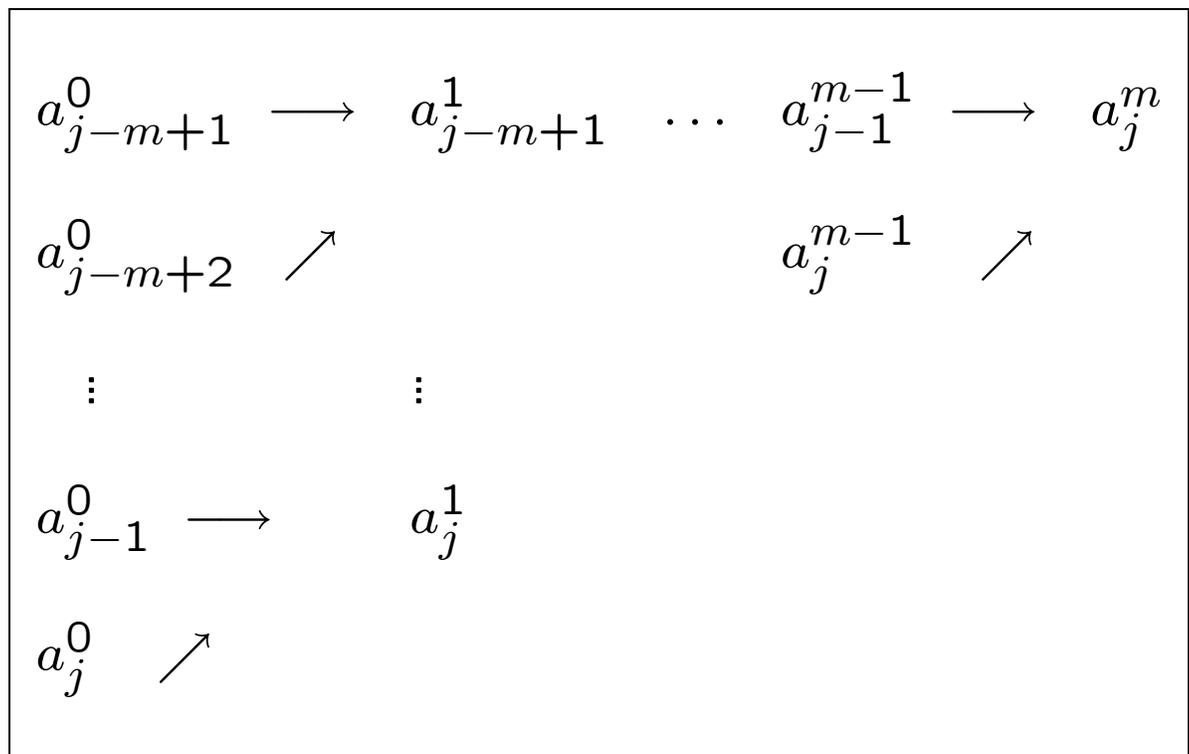
## Osservazioni importanti

(i) L'algoritmo di valutazione è valido anche per  $x < t_m$  pur di assumere che le B-spline di indice  $\leq 0$  sono identicamente nulle.

(ii) Se si deve valutare  $S(x)$ ,  $x \in [t_j, t_{j+1}]$  allora

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{i=j-m+1}^j a_i^0 B_{i,m}(x) = \sum_{i=j-m+2}^j a_i^1 B_{i,m-1}(x) \\ \dots &= \sum_{i=j-m+m}^j a_i^m B_{i,0}(x) = a_j^m(x). \end{aligned}$$

Perciò per la valutazione di  $S(x)$ ,  $x \in [t_j, t_{j+1}]$  basta calcolare i coefficienti  $a_i^r$ ,  $j - m + r \leq i \leq j$  essendo  $B_{i,m-r}(x) \equiv 0$ , per  $r = 1, \dots, m$ .



**(iii)** Complessità:  $m(m+1)/2$  combinazioni convesse, per ciascuna delle quali si richiedono 2 moltiplicazioni, 1 addizione e 1 una sottrazione (per il calcolo di  $1 - \omega_{i,m-r}$ ).

**(iv)** Numericamente stabile.

(v) Il calcolo di  $\omega_{i,m-r}(x)$  è spesso molto semplice (specie per “*spline cardinali*”, ovvero spline su nodi interi);

**Nota** : L’algoritmo di valutazione è utile soprattutto nel caso di *curve spline*.

Per valutare  $S(x)$  in diversi punti di  $[t_i, t_{i+1}[$  (caso tipico è quando si deve disegnare una curva), allora si procede come segue:

(a) calcola una volta per tutte l’espressione polinomiale di  $S(x)$  in  $[t_i, t_{i+1}[$ , ovvero

$$S(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha_j}{j!} (x - t_i)^j, \quad \alpha_j = \frac{d^j}{dx^j} s(t_i)$$

con gli  $\alpha_j$  determinati con l’algoritmo di derivazione.

(b) Valuta  $S(x)$  con l’algoritmo Hörner.

## Algoritmo di Derivazione

**Lemma 5.** Per ogni  $m \geq 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ ,  $B_{i,m}$  è differenziabile e si ha

$$B'_{i,m}(x) = m \left[ \frac{B_{i,m-1}(x)}{t_{i+m-1} - t_i} - \frac{B_{i+1,m-1}(x)}{t_{i+m} - t_{i+1}} \right]. \quad (15)$$

La dimostrazione si fa derivando la formula di  $B_{i,m}(x)$  come differenza divisa della funzione  $g(t; x) = (t - x)_+^m$ .

**Proposizione 5.** Sia  $S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_{i,m}(x)$ . La derivata destra,  $S'(x)$  è data da

$$S'(x) = DS(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i B_{i,m-1}(x), \quad (16)$$

con

$$b_i = \begin{cases} \frac{m(a_i - a_{i-1})}{t_{i+m-1} - t_i} & t_i < t_{i+m-1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Dim.**  $S'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B'_{i,m}(x)$  che mediante la (15) diventa

$$S'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i m \left[ \frac{B_{i,m-1}(x)}{t_{i+m-1} - t_i} - \frac{B_{i+1,m-1}(x)}{t_{i+m} - t_{i+1}} \right].$$

Sviluppando si ha

$$\begin{aligned} & m a_0 \left( \frac{B_{0,m-1}(x)}{t_{m-1} - t_0} - \frac{B_{1,m-1}(x)}{t_m - t_1} \right) + \\ & m a_1 \left( \frac{B_{1,m-1}(x)}{t_m - t_1} - \frac{B_{2,m-1}(x)}{t_{m+1} - t_2} \right) + \dots + \\ & + m a_{n-1} \left( \frac{B_{n-1,m-1}(x)}{t_{m+n-2} - t_{n-1}} - \frac{B_{n,m-1}(x)}{t_{m+n-1} - t_n} \right) = \\ & = m a_0 \frac{B_{0,m-1}(x)}{t_{m-1} - t_0} + m \left( \frac{a_1 - a_0}{t_m - t_1} \right) B_{1,m-1}(x) + \\ & \dots + m \left( \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{t_{m+n-2} - t_{n-1}} \right) B_{n-1,m-1}(x) - \\ & - m \frac{a_{n-1}}{t_{m+n-1} - t_n} B_{n,m-1}(x). \end{aligned}$$

Ora poichè  $B_{0,m-1} \equiv 0$  (perchè  $\in IP_{m-1}$ ) e  $B_{n,m-1} = 0$  per la scelta dei nodi, si conclude.  $\square$

## Algoritmo di inserimento di un nodo

⇒ L'idea che sta alla base di questa tecnica è quella di aumentare la flessibilità della spline senza aumentarne il grado.

Sia  $S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_{i,m}(x)$  definita su  $t = (t_0, \dots, t_{n+m})$ . Inseriamo un nodo  $\hat{t}$ ,  $\hat{t} \leq t_{n-1}$ , cioè interno.

Sia  $\mathbf{t}'$  la nuova sequenza di nodi e  $\hat{B}_{i,m}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  le B-spline cosicchè  $IP_{m,t} \subset IP_{m,t'}$ .

### Proposizione 6.

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i B_{i,m}(x) = \sum_{i=0}^n \hat{a}_i \hat{B}_{i,m}(x), \quad (17)$$

dove i nuovi coefficienti  $\hat{a}_i$  sono legati ai vecchi dalla seguente relazione:

$$\hat{a}_i = \begin{cases} a_i & t_{i+m} < \hat{t} \\ \omega_{i,m}(\hat{t})a_i + (1 - \omega_{i,m}(\hat{t}))a_{i-1} & t_i < \hat{t} < t_{i+m} \\ a_{i-1} & \hat{t} \leq t_i \end{cases} .$$

## Altre proprietà

(v) **Rappresentazione dei polinomi** Sia  $y$  un numero fissato. Sia  $S_{m,t}$  lo spazio delle spline di **grado**  $m$  e sia  $x \in [t_i, t_{i+1})$  dove ci sono  $m + 1$  B-spline non zero. Allora

$$(y-x)^m = \sum_{j=i-m}^i (y-t_{j+1}) \cdots (y-t_{j+m}) B_{j,m}(x) .$$

**Dim.** Induttivamente usando la proprietà di essere partizione dell'unità.  $\square$

Inoltre

$$\frac{\partial (y - x)^m}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

otteniamo espressioni esplicite per le potenze  $1, x, \dots, x^m$  i cui coefficienti sono le *funzioni elementari simmetriche* dei nodi. Ad esempio

$$x = \sum_{j=i-m}^i \frac{t_{j+1} + \dots + t_{j+m}}{m} B_{j,m}(x) .$$

$$x^m = \sum_{j=i-m}^i (t_{j+1} \dots t_{j+m}) B_{j,m}(x) .$$

La proprietà (v) dice che tutti i coefficienti sono indipendenti da  $i$  perciò possiamo scrivere:

$$(y-x)^m = \sum_j (y-t_{j+1}) \dots (y-t_{j+m}) B_{j,m}(x) . \tag{18}$$

La precedente relazione detta **identità di MARSDEN** vale per ogni  $x$  in cui ci sono  $m + 1$  B-spline non nulle

(vi) **Coefficienti B-spline come "blossoms" o "forme polari"**. Sia

$$s(x) = \sum_i c_i B_{i,m,t}(x) ,$$

con  $(c_i)$  funzioni dei nodi  $\mathbf{t}$ . Questa dipendenza è data da una funzione  $\mathcal{B}_s$  (il "blossom" di  $s$ ) di  $m$  argomenti.

Le proprietà di  $\mathcal{B}_s$  sono

(a) Località:  $c_i$  dipende solo da  $t_{i+1}, \dots, t_{i+m}$ ,  
 $c_i = \mathcal{B}_s(t_{i+1}, \dots, t_{i+m})$ .

(b) Simmetria: il "blossom" è una funzione simmetrica:  $\mathcal{B}_s(z_1, \dots, z_m) = \mathcal{B}_s(z_{i_1}, \dots, z_{i_m})$  con  $(z_{i_1}, \dots, z_{i_m})$  una qualsiasi permutazione di  $(1, \dots, m)$ .

(c) Interpolazione sulla diagonale: se  $z_1 = \dots = z_m = x$  allora  $\mathcal{B}_s(x, \dots, x) = s(x)$ .

(d) Multiaffinità: il blossom è affine in ciascun suo argomento:  $\mathcal{B}_s(\dots, \alpha u + (1 - \alpha)v, \dots) = \alpha \mathcal{B}_s(\dots, u, \dots) + (1 - \alpha) \mathcal{B}_s(\dots, v, \dots)$ .

**Dim.** La (vi) si prova mediante l'identità di Marsden. Se  $x \in [t_\mu, t_{\mu+1})$  la spline  $s(x) = \sum_i c_i B_{i,m,t}(x)$  si riduce a un singolo pezzo polinomiale  $s_\mu(x)$ . Ma  $\{(y_j - x)^m\}_{j=0}^m$  sono una base per  $IP_m$  (se  $y_j$  distinti!). Quindi

$$\begin{aligned}
 s_\mu(x) &= \sum_{j=0}^m d_j (y_j - x)^m \\
 &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=\mu-m}^{\mu} d_j (y_j - t_{i+1}) \cdots (y_j - t_{i+m}) B_{i,m}(x) \\
 &= \sum_{i=\mu-m}^{\mu} \left( \sum_{j=0}^m d_j (y_j - t_{i+1}) \cdots (y_j - t_{i+m}) \right) B_{i,m}(x) \\
 &= \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_i B_{i,m}(x) .
 \end{aligned}$$

Per provare la (d), si osservi  $y_j = \alpha y_j + (1 - \alpha) y_j$ , da cui  $y_j - \alpha u + (1 - \alpha) v$  ovvero  $\alpha(y_j - u) + (1 - \alpha)(y_j - v)$  e si conclude.  $\square$

**Nota bene:** il concetto di blossom permette di ridimostrare in maniera semplice tutte le proprietà delle splines, ad esempio l'algoritmo di inserimento di un nodo.

Sia ancora  $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \cup \{u\}$  con  $t_\mu \leq u < t_{\mu+1}$ , allora  $\mathcal{S}_{m,\mathbf{t}} \subset \mathcal{S}_{m,\hat{\mathbf{t}}}$  e se  $s \in \mathcal{S}_{m,\mathbf{t}}$  con coeff.  $c_i$  e coeff.  $d_i$  in  $\mathcal{S}_{m,\hat{\mathbf{t}}}$  avremo:

$$d_i = \begin{cases} c_i & i \leq \mu - m \\ \omega_{i,m}(u)c_i + (1 - \omega_{i,m}(u))c_{i-1} & \mu - m < i \leq \mu \\ c_{i-1} & i > \mu \end{cases} .$$

(19)

**Dim.** Osserviamo che  $\hat{t}$  è data da:

$$\hat{t}_i = \begin{cases} t_i & i \leq \mu \\ u & i = \mu + 1 \\ t_{i-1} & i > \mu + 1 \end{cases} .$$

Ma poiché  $c_j = \mathcal{B}_s(t_{j+1}, \dots, t_{j+m})$  e  $d_j = \mathcal{B}_s(\hat{t}_{j+1}, \dots, \hat{t}_{j+m})$  allora (19) segue per  $i \leq \mu - m$  e  $i > \mu$ . Per i restanti valori di  $i$  notiamo che

$$u = (1 - \omega_{i,m}(u))t_i + \omega_{i,m}(u)t_{i+m}.$$

Per la multiaffinità del blossom, posto  $\lambda = \omega_{i,m}(u)$  si avrà:

$$\begin{aligned} d_i &= \mathcal{B}_s(\hat{t}_{i+1}, \dots, \hat{t}_{i+m}) \\ &= \mathcal{B}_s(t_{i+1}, \dots, u, \dots, t_{i+m-1}) \\ &= \mathcal{B}_s(t_{i+1}, \dots, (1-\lambda)t_i + \lambda t_{i+m}, \dots, t_{i+m-1}) \\ &= \lambda \mathcal{B}_s(t_{i+1}, \dots, t_{i+m}) + (1-\lambda) \mathcal{B}_s(t_i, \dots, t_{i+m-1}) . \quad \square \end{aligned}$$

Altra osservazione. Il processo di inserimento di un nodo è equivalente ad un cambiamento di base ovvero da B-spline in  $\mathcal{S}_{m,t}$  a B-spline in  $\mathcal{S}_{m,\hat{t}}$ .

**Dim.** Infatti sia  $\mathbf{b}$  il vettore riga delle  $n$  B-spline in  $\mathcal{S}_{m,t}$  e  $\hat{\mathbf{b}}$  quello delle  $n + 1$  B-spline in  $\mathcal{S}_{m,\hat{t}}$ . Allora  $\mathbf{b} = A\hat{\mathbf{b}}$  con la matrice  $A$  bidiagonale  $(n + 1) \times n$  :

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 - \omega_2 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 - \omega_n & \omega_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \omega_{n+1} \end{pmatrix},$$

con  $\omega_i = 1, i \leq \mu - m$  e  $\omega_i = 0, i > \mu$ .  $\square$

(vi) **Convergenza del poligono di controllo.** Sia data una spline  $s \in \mathcal{S}_{m,t}$  con coefficienti  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sia  $l$  la funzione lineare a tratti ottenuta connettendo i punti di controllo  $(t_i^*, l_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  dove  $t_i^* = \frac{t_{i+1} + \dots + t_{i+m}}{m}$ . Allora se  $s$  è riscritta in termini di B-spline su partizioni di nodi sempre più fini, il poligono di controllo  $l$  converge a  $s$  con ordine di convergenza quadratico.

Ovvero, inserendo un numero di nodi sufficientemente grande il poligono di controllo può usarsi come una approssimazione della spline.

## *LEZIONE 4*

### **Complementi**

## Interpretazione geometrica delle B-Spline

Al solito

$$M_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu=0}^n \frac{n(x_\nu - x)_+^{n-1}}{\omega'(x_\nu)}, \quad (20)$$

dove  $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$  sia la B-spline di ordine  $n$ . Un'altra cosa interessante da ricordare è *l'interpretazione geometrica* di  $M_n(x)$ . Si usa la formula di *Hermite-Genocchi* (vedasi libro K. Atkinson "An introduction to Numerical Analysis", pag. 144) delle differenze divise.

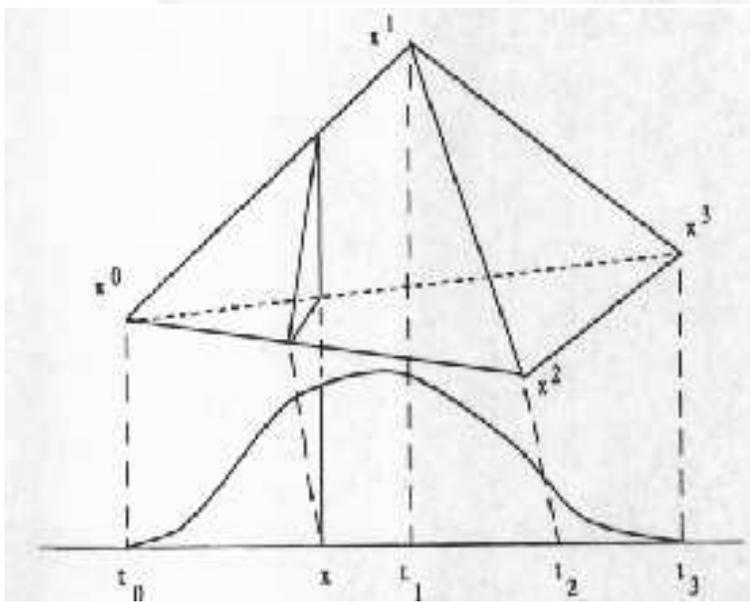
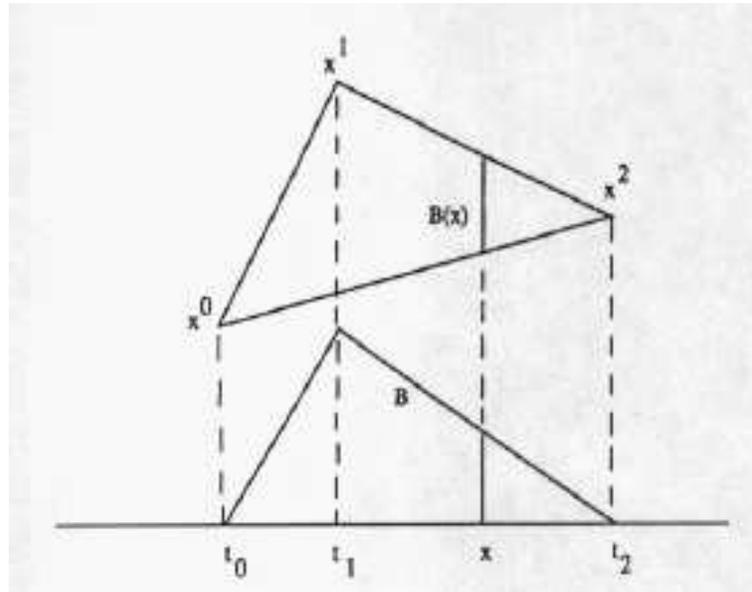
$$f[x_0, \dots, x_n] = \int_{\tau_n} f^{(n)}(x_0 t_0 + \dots + x_n t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n, \quad (21)$$

dove  $t_0 = 1 - (t_1 + t_2 + \dots + t_n)$  e l'integrale è fatto sul simpleso  $\tau_n$  :  $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0, 1 - \sum_{i=1}^n t_i \geq 0$ .

Si ottiene pertanto la seguente interpretazione geometrica.

**Teorema 6.** *La funzione  $M_n(x; x_0, \dots, x_n)$ , è la funzione di densità lineare ottenuta proiettando ortogonalmente sull'asse  $x$  il volume di un semplice  $n$ -dimensionale  $\sigma_n$  di volume unitario, localizzato cosicchè i suoi  $n + 1$  vertici vengono proiettati ortogonalmente nei punti  $x_0, \dots, x_n$  dell'asse  $x$ , rispettivamente.*

**Commento.**  $M_n(x)$  è uguale al volume  $(n-1)$ -dimensionale dell'intersezione del semplice  $\sigma_n$  con l'iperpiano ortogonale all'asse  $x$  e al punto  $x$ ,  $x_0 \leq x \leq x_n$ .



Costruzione geometrica di una B-spline lineare e quadratica

**Esempio 4.** *Nel caso lineare la costruzione può vedersi come segue. Si consideri la B-Spline con nodi  $x_0 < x_1 < x_2$  (normalizzata così da avere integrale unitario). Siano  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$  punti in  $\mathbb{R}^2$  t.c.  $\mathcal{P}_1 \mathbf{x}^i = x_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  dove in generale la mappa  $\mathcal{P}_k : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  denota la restrizione alle prime  $k$  componenti del vettore  $(x_1, \dots, x_{n+k})$ . Inoltre  $Vol_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = 1$ , sia l'area del triangolo. Detto*

$\sigma_2 = [\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$  il suo "convex-hull", avremo

$$B(x) = Vol_1(\sigma_2 \cap \mathcal{P}_1^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

dove  $Vol_1$  indica la lunghezza del segmento (vedi Figure ).

## Interpolazione con funzioni spline

Sia  $f(x)$  una funzione nota su  $x = t_1, x = t_2, \dots, x = t_m$ . Si desidera interpolarla per mezzo di una spline  $S(x)$  di ordine  $n$  (grado  $n-1$ ) con prescritti *nodi interni*  $x_1, \dots, x_{N-1}$ . Inoltre  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$  e

$$t_1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < t_m .$$

I parametri da determinare sono

$$N + n - 1$$

e verranno determinati imponendo le condizioni di interpolazione

$$S(t_j) = f(t_j), \quad j = 1, \dots, m . \quad (22)$$

Per l'unicità della soluzione di (22) è necessario che

$$m = N + n - 1 . \quad (23)$$

I. J. Schoenberg e A. Whitney (1953) hanno dimostrato che *esiste un'unica* soluzione del problema (22) **se e solo se**

$$\begin{aligned} t_1 < x_1 < t_{n+1} \\ t_2 < x_2 < t_{n+2} \\ &\vdots \\ t_{N-1} < x_{N-1} < t_m \end{aligned} \tag{24}$$

**Osservazione.** Non sono richieste informazioni circa le derivate finali (come nel caso del problema dei momenti con spline cubiche naturali). In tal caso il problema d'interpolazione è trattato come un normale problema di interpolazione polinomiale.

Possiamo scrivere  $S(x) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x)$ , dove  $\phi_i$  sono B-spline di ordine  $n$  con nodi **interni** la sequenza  $x_1, \dots, x_{N-1}$ . Perciò (22) diventa

$$\sum_{i=1}^m c_i \phi_i(t_j) = f(t_j), \quad j = 1, \dots, m. \quad (25)$$

ovvero, in forma matriciale,  $A\mathbf{c} = \mathbf{f}$ , con ovvio significato per  $A$  e i vettori  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{f}$ .

Costruiamo le B-spline  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Aggiungiamo dapprima  $2n$  nodi addizionali:

$$x_{1-n}, \dots, x_0 \leq t_1; \quad x_{1-n} < x_{2-n} < \dots < x_0.$$

$$\begin{aligned} t_m &\geq x_N, x_{N+1}, \dots, x_{N+n-1}; \\ x_N &> x_{N+1} > \dots > x_{N+n-1}. \end{aligned}$$

$$S(x) = \sum_{i=1}^m c_i^* B_{i,n}(x) = \sum_{i=1}^m c_i N_{i,n}(x), \quad (26)$$

dove  $N_{i,n}(x)$  le B-spline *normalizzate* (de Boor),  $N_{i,n} = (x_i - x_{i-n})B_{i,n}$ .

**Nota.** I  $2n$  nodi addizionali possono essere presi *coincidenti* (Carrasso, Laurent 1969).

Il sistema d'interpolazione con B-spline normalizzate sarà:

$$\sum_{i=1}^m c_i N_{i,n}(t_j) = f(t_j), \quad j = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Per la proprietà delle B-spline di avere supporto minimo cioè

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} > 0 & x_{i-n} \leq x < x_i \\ = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che la matrice  $A$  ha *al più*  $n$  elementi diversi da zero per ogni riga.

**Esempio 5.**  $N = 6, n = 4$  (spline cubiche)  
 con nodi

$$\begin{aligned}
 a = t_1 &< t_2 < x_1 < t_3 < x_2 < x_3 < \\
 &< t_4 < t_5 < t_6 < x_4 < t_7 < t_8 < \\
 &< x_5 < t_9 = b.
 \end{aligned}$$

La matrice  $A, 9 \times 9$  sarà :

$$A = \begin{bmatrix}
 \times & & & & & & & & \\
 \times & \times & \times & \times & & & & & \\
 & \times & \times & \times & \times & & & & \\
 & & & \times & \times & \times & \times & & \\
 & & & \times & \times & \times & \times & & \\
 & & & \times & \times & \times & \times & & \\
 & & & & \times & \times & \times & \times & \\
 & & & & \times & \times & \times & \times & \\
 & & & & & & & & \times
 \end{bmatrix}$$

## Curve B-Spline

Sia  $t$  il parametro di una curva parametrica  $t \in [\alpha, \beta]$ , e  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ ,  $n$  punti bidimensionali.

### **Definizione 5.**

a) *La curva B-spline di ordine  $m$  associata al poligono di controllo  $P_0, \dots, P_{n-1}$  è la curva parametrica  $\gamma$*

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{i,m}(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

b) *Se consideriamo al posto di B-spline, i polinomi di Bernstein,  $B_i^m(t)$  allora*

$$B(t) = \sum_{i=0}^m P_i B_i^m(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

*è detta curva di Bézier associata al poligono di controllo  $(P_0, \dots, P_m)$ .*

## Algoritmo di De Casteljau

**Algoritmo 1.** Dato un insieme  $\mathcal{P} = \{P_0, \dots, P_n\}$  di punti del piano e  $t \in \mathbb{R}$  (usualmente  $t \in [0, 1]$ ), il generico punto appartenente alla curva di Bézier si determina con i seguenti passi:

1. *{Passo di inizializzazione}*

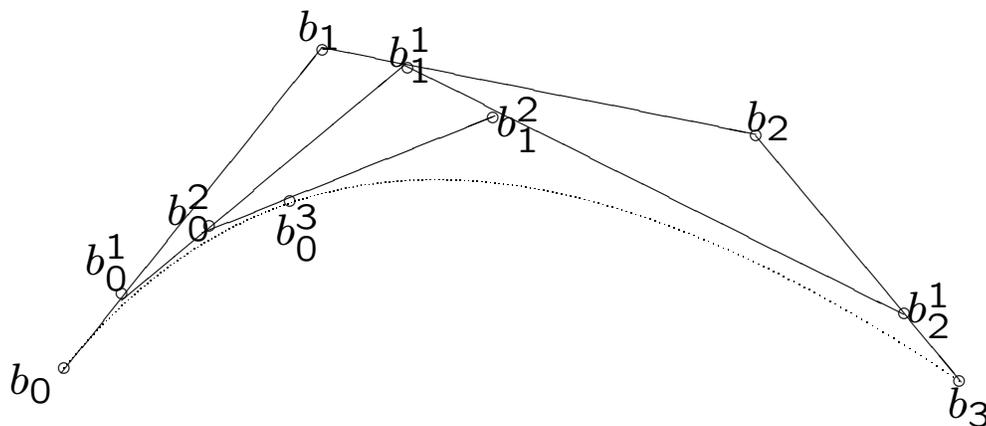
$$b_i^{(0)}(t) = P_i; \quad (28)$$

2. *{Passo iterativo}*

$$b_i^{(r)}(t) = (1-t)b_i^{(r-1)}(t) + tb_{i+1}^{(r-1)}(t)$$

$r = 1, \dots, n \quad i = 0, \dots, n-r$

La curva di Bézier calcolata con l'algoritmo 1 è quindi ottenuta con combinazioni baricentriche ripetute. In figura è descritto il funzionamento dell'algoritmo di De Casteljau.



Costruzione di una curva di Bézier con l'algoritmo di De Casteljau.

**Proposizione 7.** *I punti  $b_i^{(r)}(t)$  possono essere espressi in termini di polinomi di Bernstein  $B_j^r$  di grado  $r$  risultando*

$$b_i^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^r(t) \quad i = 0, \dots, n-r \quad (29)$$