Esame di Calcolo Numerico

Laurea in Statistica ed Informatica
Laurea Magistrale in Astronomia
Prof. S. De Marchi
`Padova, 25 gennaio 2011`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome, numero di matricola. Consegnare fogli leggibili!. Inviare poi tutti i files a `demarchi@math.unipd.it` **NOTA: non allegate immagini in formato Matlab .fig ma .jpg o .eps.**

1. Data la matrice `A=hilb(5)+diag([1 2 3 4 5])` di ordine $n = 5$,

   (a) Studiare il metodo iterativo dipendente dal parametro reale $\theta \in [0, 1]$

   $$x^{(k+1)} = (I - \frac{\theta}{2}A)x^{(k)} + \frac{\theta}{2}\, b\,, \quad k \geqslant 0\,. \tag{1}$$

   Si chiede di verificare graficamente per quali valori di θ il metodo converge.

   (b) Sia θ^* tale che $\rho(\theta^*) = \min\{\rho(\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$ per cui il metodo iterativo converge. Siano $b \in \mathbb{R}^5$ cosicché `x=ones(5,1)`. Inoltre `x0=zeros(5,1)`. Risolvere quindi il sistema $Ax = b$ con il metodo iterativo (1) a meno di $tol = 1.e - 6$ con test sull'errore relativo.

2. Data la matrice

   `A = 0.25*hilb(7)+diag([1 2 3 4 5 6 7])`

   e il termine noto `b` scelto cosicchè la soluzione `x` del sistema lineare `Ax=b` sia

   `x=[7 6 5 4 3 2 1]`.

   (a) Dire perchè convergono i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

   (b) Fissata la tolleranza $\eta = 1.e - 9$ e sia P la matrice di iterazione tale che $\|P\| < 1$, allora risolvendo

   $$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \eta(1 - \|P\|)/\|P\|^k$$

   possiamo stimare a priori il numero di iterazioni k necessarie per ottenere una soluzione a meno di η. Partendo dalla soluzione iniaziale $x^{(0)}$`=ones(7,1)` e usando la norma $\| \|_\infty$, determinare il numero di iterazioni k sia per il metodo di Jacobi che Gauss-Seidel.

   (c) Verificare sperimentalmente i risultati ottenuti applicando i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel per il calcolo della soluzione del sistema $Ax = b$. Che cosa si può concludere?

Tempo: **2 ore**.

SOLUZIONI

Primo esercizio

```
clear all
close all
% Esercizio 1 esame del 25 gennaio 2011

%parte(a)
A=hilb(5)+diag([1 2 3 4 5]);
t=linspace(0,1,100);
for k=1:100,
    P=eye(5)-t(k)/2*A;
    r(k)=max(abs(eig(P)));
end

rt=max(find(r<1)); %indice in cui il raggio spettrale interseca la retta t=1
rrt=t(rt)
plot(t,r,'b',t,ones(1,length(t)),'r:',t(rt),r(rt),'ok')
legend('raggio spettrale','zona ci convergenza','intersezione')
% Dal grafico si evince che il metodo converge per t<0.767

%parte (b)
[tt,mr]=min(r);  %minimo di t in corrispondenza al

tm=t(mr) %theta corrispondente al minimo del raggio spettrale
              % che vale circa 0.586

xs=ones(5,1);
P=eye(5)-tm/2*A;
b=2/tm*(xs-P*xs)  %calcolo del termine noto b
% o equivalentemente b=A*xs

%---------------------
% calcolo del termine noto b direttamente dal sistema
% originale
% b=A*xs
% Naturalmente il risultato sara` lo stesso
%----------------------

tol=1.e-6; nmax=100;
```

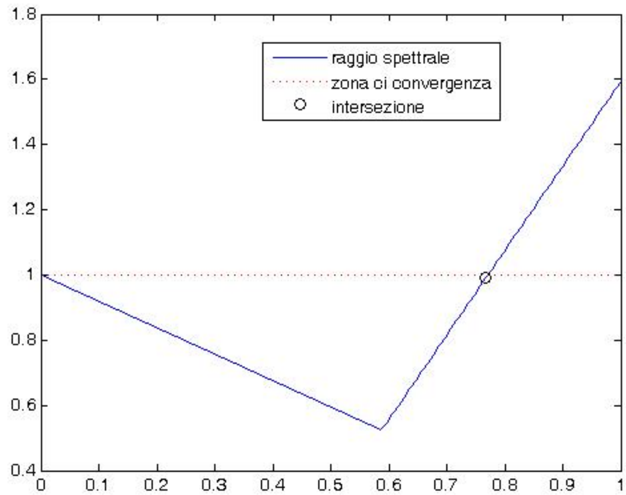

Figure 1: Grafico del raggio spettrale della matrice $I - \theta/2A$ al variare di $\theta \in [0, 1]$

```
x0=zeros(5,1);
q=tm/2*b;
x1=P*x0+q;
k=1;
while (norm(x1-x0,inf)>tol*norm(x1,inf) & k <= nmax)
    x0=x1;
    x1=P*x0+q;
    k=k+1;
end
disp('Iterazioni e soluzione')
k-1
x1
```

Secondo esercizio

```
clear all
close all
% Esercizio 2 esame del 25 gennaio 2011

%parte(a)
%A=diag(ones(7,1)*10)+ diag(ones(6,1)*2,1)+diag(ones(6,1)*3,-1);
```

```
A=0.25*hilb(7)+diag([1 2 3 4 5 6 7])
b=A*[7 6 5 4 3 2 1]'

% (a)
% I metodi di Jacobi e G-S convergono perche` A e` (simmetrica)
% diagonalmente dominante in senso stretto per righe e colonne

% (b)
% Matrice e termine noto di Jacobi

tol=1.e-9;

D=diag(diag(A));
J=-inv(D)*(A-D);
bJ=inv(D)*b;

% Matrice di e termine noto di Gauss-Seidel

L=tril(A)-D; U=triu(A)-D;
DI=inv(D+L);
G=-DI*U;
bG=DI*b;


x0=zeros(7,1);
x1J=J*x0+bJ;
x1G=G*x0+bG;

% ora trovo il numero di iterazioni k con i due metodi

normJ=norm(J,inf);
normG=norm(G,inf);

normdiffJ=norm(x1J-x0,inf);
normdiffG=norm(x1G-x0,inf);

kJ=floor(log(tol*(1-normJ)/normdiffJ)/log(normJ))
kG=floor(log(tol*(1-normG)/normdiffG)/log(normG))

% kJ=kG=20;
```

```
% (c)
% metodo di Jacobi
[xn,iterJ,flag]=jacobi(A,b,x0,100,tol)

% metodo di Gauss-Seidel
[sol,iterG,err]=GaussSeidel(A,b,x0,tol,100)

%Conclusioni
% Come si nota, il numero delle iterazioni e' molto minore:
% con Jacobi 11 e con G-S solo 6. Come ci si doveva aspettare
% i valori di kJ e kG sono delle sovrastime!



function [xn,i,flag]=jacobi(a,f,xv,nmax,toll)
%-------------------------------------------%
% Metodo iterativo di Jacobi per sistemi lineari.
%------------------------------------------%
% Parametri in ingresso:
% a : Matrice del sistema
% f : Termine noto (vettore riga)
% xv : Vettore iniziale (vettore riga)
% nmax : Numero massimo di iterazioni
% toll : Tolleranza sul test d'arresto (fra iterate)
%
% Parametri in uscita
% xn : Vettore soluzione
% i : Iterazioni effettuate
% flag: se flag=1 converge altrimenti flag=0
%-------------------------------------------------------%
flag=1; i=1; d=diag(diag(a));
J=-inv(d)*(a-d); q=inv(d)*f;
xn=J*xv+q;
while (i<=nmax & norm(xn-xv,inf)>toll*norm(xv,inf))
xv=xn;
xn=J*xv+q;
i=i+1;
end
if i>nmax,
```

```
disp('** Jacobi non converge nel numero di iterazioni fissato');
flag=0;
end
i=i-1
return

function [sol,iter,err]=GaussSeidel(A,b,x0,tol,kmax)
%--------------------------------------------- %
% Funzione che implementa il metodo iterativo
% di Gauss-Seidel
%---------------------------------------------%
% Inputs
% A, b: matrice e termine noto, rispettivamente
% x0 : guess iniziale
% tol : tolleranza calcoli
%
% Outputs
% sol : vettore soluzione
% iter: numero delle iterazioni
%---------------------------------------------%
n=length(x0);
D=diag(diag(A)); L=tril(A)-D; U=triu(A)-D; DI=inv(D+L); GS=-DI*U;
disp('raggio spettrale matrice iterazione di Gauss-Seidel');
max(abs(eig(GS)))
b1=DI*b;
x1=GS*x0+b1;
k=1;
err(k)=norm(x1-x0,inf);
while(err(k)>tol*norm(x0,inf) & k<=kmax)
x0=x1;
x1=GS*x0+b1;
k=k+1;
err(k)=norm(x1-x0,inf);
end
sol=x1;

iter=k-1;
return
```