# LABORATORIO DI ANALISI NUMERICA

*Laurea Magistrale in Statistica e Informatica*

**Alcuni esercizi per l'esame**

*Prof. Stefano De Marchi*

`Padova, 3 dicembre 2009`

1. Si consideruno le funzioni $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = -\log x$ nel loro comune insieme di definizione.

   (a) Dimostrare che le curve $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ si intersecano in un unico punto, di ascissa $\alpha$.

   (b) Applicare il metodo di Newton con un opportuno punto iniziale ed approssimare $\alpha$ in modo che la tolleranza per l'errore relativo sia inferiore a $10^{-8}$.

   (c) Date le seguenti funzioni

$$g_1(x) = -\log x$$
$$g_2(x) = -\frac{\log x}{x}$$
$$g_3(x) = e^{-x^2}$$

   dire quali possono essere considerate funzioni di iterazione di punto fisso per approssimare $\alpha$, quali assicurano la convergenza e con che ordine. Motivare le risposte.

2. Si consideri la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   dipendente dal parametro $\alpha$.

   (a) Si enunci una condizione sufficiente su $\alpha$ affinché il metodo di Jacobi per la risoluzione di sistemi lineari sia convergente per la matrice $A_\alpha$.

   (b) Si implementi il metodo di Jacobi e lo si applichi al sistema lineare di matrice $A_\alpha$, per un $\alpha$ che assicura la convergenza del metodo, e termine noto $b$, in modo che la soluzione esatta del sistema sia $x = [1, 2, 3]^{\mathrm{T}}$, con criterio d'arresto basato sulla stima dell'errore relativo. Si produca un grafico (logaritmico nelle ordinate) che riporti, in corrispondenza al numero di iterazioni (fino ad un massimo di 30), la stima dell'errore relativo e l'errore relativo.

   (c) Si giustifichi il decadimento lineare dell'errore.

3. Data la funzione $f(x) = \sin(2x - \pi x^2)$ sull'intervallo $I = [-2, 3]$, si determini il grado massimo del polinomio interpolante in forma di Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i), \quad n \geq 5 \tag{1}$$

dove i punti d'interpolazione $x_i$ sono i punti di Chebyshev, per cui l'errore assoluto $E_n = \|p_n - f\|_\infty$ risulta essere $\leq 1.e-2$.

Per valutare il polinomio su un insieme `x=linspace(-2,3,1000)` di punti target, il calcolo di $l_i$ su $x$ si può fare usando la seguente funzione.

```
function l = lagrai_target(z,x,i)
%-----------------------------------------------------
% Calcola l'i-esimo pol. elementare di Lagrange
% z = nodi di interpolazione
% x = vettore (colonna!) di punti target su cui valutare l_i
% i = indice del polinomio
%
% l = vettore dei valori di l_i sui targets
%-------------------------------------------------
n = length(z); m = length(x);

l = prod(repmat(x,1,n-1)-repmat(z([1:i-1,i+1:n]),m,1),2)/...
prod(z(i)-z([1:i-1,i+1:n])); return
```

Pertanto una volta costruita la matrice $L$, che ha tante righe quante il grado $n$, la valutazione (1) si farà con un semplice prodotto vettore-matrice.

Infine, si chiede di fare il plot della funzione, del polinomio interpolante (al grado massimo) nonchè dell' andamento dell'errore assoluto al variare del grado `n=5:Nmax`.

4. Data la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}, \quad x \in [0, 1]$, determinare a piori il numero di punti equispaziati necessari per interpolare $f(x)$, con interpolazione lineare composita, con un errore (in norma infinito) minore di $10^{-6}$.

   Si faccia poi vedere che, usando punti di Chebyshev e interpolazione non composita, servono meno di un decimo dei punti.

   Produrre quindi il grafico di entrambi i polinomi d'interpolazione e si calcoli numericamente l'errore commesso.

5. Si considerino i dati forniti dalla funzione `titanium`, usata in Matlab come dati test (usare `[x,y]=titanium`).

   (a.1) Perché non converge l'interpolazione polinomiale su questi dati? Se si desiderasse comunque interpolare i dati, che tipo d'interpolazione polinomiale converrebbe usare?

   (a.2) Si costruisca una spline cubica con condizioni "knot-a-knot" su una partizione di Chebyshev-Lobatto con lo stesso numero di nodi di `x` dell'intervallo `[min(x),max(x)]`. Si dica, in quale sottointervallo si commette il massimo errore rispetto a dati e si suggerisca, indicativamente, come si potrebbe risolvere il problema.

. . .

(b.1) Si calcoli, mediante il metodo dei trapezi composito, l'area suttesa sia dai dati iniziali che dai dati ottenuti con l'interpolante spline cubica.

(b.2) Qual è l'errore relativo tra l'area "iniziale" e quella ottenuta con l'interpolante spline?