LABORATORIO DI ANALISI NUMERICA

Laurea Magistrale in Statistica e Informatica

Esercitazione sulla quadratura numerica

Prof. Stefano De Marchi

Padova, 26 novembre 2009

1 Formule dei trapezi e di Simpson

Per il calcolo approssimato di integrali definiti, abbiamo visto due metodi importanti: la *formula dei trapezi* e il *metodo di Simpson*. Per entrambi i metodi, che sono di tipo *interpolatorio*, si sono viste sia la forma *semplice* che quella *composita*. Se indichiamo con $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, e con $I_T(f)$, $I_T^c(f)$, $I_S(f)$ e $I_S^c(f)$ le corrispondenti formule di quadratura semplici e composite, valgono le formule seguenti.

- `Formula dei trapezi e relativo errore.`

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \ ,$$

$$E_T(f) = I(f) - I_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \ , \ \ \xi \in (a, b).$$

- `Formula dei trapezi composita (o trapezoidale) e relativo errore.` Qui dobbiamo prendere una suddivisione equispaziata di $[a, b]$ del tipo $\{x_0 = a, \ldots, x_i = a + ih, \ldots, x_n = b\}$, con $h = (b-a)/n$:

$$I_T^c(f) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \ ,$$

$$E_T^c(f) = I(f) - I_T^c(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \ , \ \ \xi \in (a, b).$$

- `Formula di Simpson e relativo errore.`

$$I_S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \ ,$$

$$E_S(f) = I(f) - I_S(f) = -\frac{1}{24}\frac{(b-a)^5}{32} f^{(4)}(\xi), \ \ \xi \in (a, b)\, , \ h = (b-a)/2\, .$$

- `Formula di Simpson composita e relativo errore.` Qui prendiamo, come nel caso dei trapezi, una suddivisione equispaziata di $[a, b]$. Quindi nel generico intervallo $I_k =$

$[x_{k-1}, x_k]$, consideriamo come punti di interpolazione $x_{k-1}, \bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ e x_k. Posto $h = (b-a)/n$:

$$I_S^c(f) = \frac{h}{6} \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_{k-1}) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_k)\right] \ ,$$

$$E_S^c(f) = I(f) - I_S^c(f) = -\left(\frac{b-a}{180}\right) \frac{h^4}{16} f^{(4)}(\xi), \ \ \xi \in (a,b) \ .$$

Esercizio 1. Si calcoli numericamente

$$\int_0^{2\pi} x\mathrm{e}^{-x} \cos 2x dx = \frac{3(\mathrm{e}^{-2\pi} - 1) - 10\pi \mathrm{e}^{-2\pi}}{25} \approx -0.12212260462 \ ,$$

mediante le *formule composite* dei trapezi e di Simpson,

1. Determinare *a priori* il numero di punti necessari affinché gli errori assoluti $E_T^c(f)$ e $E_S^c(f)$ siano in modulo minori $\texttt{tol} = \texttt{1.e} - \texttt{6}$.

2. Determinare anche l'errore assoluto rispetto al valore esatto.

2 Formule gaussiane composite

- `Formula di Gauss composita e relativo errore.`

  Per costruire queste formule operiamo come segue. Partendo da una suddivisione equispaziata consideriamo, invece dei punti x_{k-1} e x_k, i punti

  $$y_{k-1} = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ , \quad y_k = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ .$$

  La formula di quadratura di Gauss composita si esprime allora come segue.

  $$I_G^c(f) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(f(y_{k-1}) + f(y_k)\right) \ ,$$

  $$I(f) - I_G^c(f) = \frac{b-a}{4320} h^4 f^{(4)}(\xi) \ , \ \ \xi \in (a,b).$$

- `Formula di Gauss-Legendre.`

  La formula di quadratura di *Gauss-Legendre* si può esprimere

  $$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(z_i) \ . \qquad (1)$$

  ove, il vettore dei nodi $\mathbf{z}$ e dei pesi $\mathbf{w}$ si possono determinare con la M-function:

```
function [z,w]=zwlegendre(n)
% This function computes nodes z and weights
% w of the Gauss-Legendre quadrature formula.
%---------------------------------------------
% Input:
%      n = number of quadrature nodes
% Outputs:
%      z = column vector of the nodes
%      w = column vector of the weights
%---------------------------------------------
if n<=1
    z=[0]; w=[2];
    return
end
A=zeros(n);k=[1:n-1]; v=k./(sqrt(4*(k.^2)-1));
A=A+diag(v,1)+diag(v,-1);
[w,z]=eig(A);
nm2=sqrt(diag(w'*w));
w=(2*w(1,:)'.^2)./nm2;
z=diag(z);
```

Esercizio 2 Calcolare l'integrale di

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos(x)\, dx \tag{2}$$

a meno di $\texttt{tol} = 1.e-9$ mediante la formula di Gauss composita.

Si chiede inoltre di calcolare l'integrale (2) con la formula di Gauss-Legendre costruita prendendo $n = 2^i,\ i = 0, 1, \ldots, imax = 8$ punti a meno di $\texttt{tol} = 1.e-9$ (ci si arresterà quando $n > 2^8$ oppure l'errore in modulo diventa minore di tol, assumendo come valore esatto quello che si ottiene con la funzione `quadl`).

3 Quadratura con il metodo di Romberg

Il metodo di Romberg per la quadratura si applica usando la seguente *ricetta*: si costruisce una tabella, $\mathbf{T}$ triangolare (inferiore), la cui prima colonna consiste dei valori approssimati dell'integrale mediante la formula trapezoidale costruita usando suddivisioni regolari con $N = 2^m,\ m = 0, 1, 2, \ldots$ punti.

Se indichiamo con $T_{i,1}$ il generico elemento della prima colonna di $\mathbf{T}$, che contiene il valore dell'integrale calcolato con la formula trapezoidale con passi $h_i = 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$, gli elementi delle successive colonne sono costruiti mediante la ricorrenza

$$T_{i,k} = \frac{4^k T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^k - 1}\ ,\quad k \geq 2. \tag{3}$$

Esercizio 3. Ricordando che ciascuna formula $T_{1,k}, T_{2,k}, T_{3,k}, \ldots.$ è una formula di grado di esattezza $2k-1$, calcolare l'integrale di $f(x) = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos(x)$ su $[-1,1]$ per $k=3$.

4 Due esercizi da appelli d'esame

1. Si consideri la matrice $A = \texttt{toeplitz}([10, -1, -1, 2, 0, 0]) \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ che possiamo decomporre in $A = M + D + N$ con $D = \texttt{diag}(\texttt{diag}(\texttt{A}))$, $M = \texttt{triu}(\texttt{A}) - \texttt{D}$ e $N = A - M - D$.

   Si considerino i seguenti schemi iterativi

   (i) $(M + D)x^{(k+1)} = -Nx^{(k)} + b\,,$

   (ii) $Dx^{(k+1)} = -(M + N)x^{(k)} + b\,,$

   (iii) $(M + N)x^{(k+1)} = -Dx^{(k)} + b\,.$

   (a) Dire quali di essi è convergente e quale convergerà più velocemente.

   (b) Sia poi `b=1:6`. Si calcoli la soluzione del sistema $A\,x = b$ con uno dei metodi convergenti, a partire dalla soluzione $x^{(0)}$ `=[ones(2,1);zeros(4,1)]` a meno di $tol = 1.e-6$. Si plotti anche l'errore assoluto, $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ per ognuno dei metodi convergenti.

2. Data la funzione $f(x) = \sin(2x - \pi\, x^2)$ sull'intervallo $I = [-2, 3]$, si determini il grado massimo del polinomio interpolante in forma di Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i), \quad n \geq 5 \tag{4}$$

   dove i punti d'interpolazione x_i sono i punti di Chebyshev, per cui l'errore assoluto $E_n = \|p_n - f\|_\infty$ risulta essere $\leq 1.e-2$.

   Sugg. Per valutare il polinomio su un insieme `x=linspace(-2,3,1000)` di punti target, il calcolo di l_i su x si può fare usando la funzione Matlab `lagrange` vista durante le esercitazioni di laboratorio. Pertanto una volta costruita la matrice L, che ha tante righe quante il grado n, la valutazione (4) si farà con un semplice prodotto vettore-matrice.

   Infine, si chiede di fare il plot della funzione, del polinomio interpolante (al grado massimo) nonchè dell' andamento dell'errore assoluto al variare del grado `n=5:Nmax`.