LABORATORIO DI ANALISI NUMERICA

Laurea Magistrale in Statistica e Informatica

Esercitazione sull'interpolazione polinomiale

Prof. Stefano De Marchi

`Padova, November 5, 2009`

Come fatto finora, presentiamo dapprima alcune utili comandi che per finora non avevamo incontrato.

1 Comando `repmat`

Il comando, sostanzialmente serve per fare copie di una matrice . Vediamo un esempio che ci chiarisce la cosa. `repmat`

```
>> repmat([1,2;3,4],2,2)

ans =

     1     2     1     2
     3     4     3     4
     1     2     1     2
     3     4     3     4
```

2 Polinomio d'interpolazione in forma di Lagrange

Dati $n+1$ coppie $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, \ldots, n+1$, il polinomio d'interpolazione di grado n in forma di Lagrange si scrive come

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x) y_i \tag{1}$$

dove ciascuna funzione l_i è un polinomio elementare di Lagrange di grado n definito come

$$l_i(x) = \prod_{i=1, i\neq j}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, .$$

Osserviamo che la (1) può interpretarsi anche come un prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n+1})^T$ e $\mathbf{l} = (l_1(x), \ldots, l_{n+1}(x))^T$.

Come appena osservato, nella valutazione del polinomio d'interpolazione $p_n(x)$ su un insieme di *punti target*, $\bar{x}$, che sono in generale diversi dai punti d'interpolazione x_i ed in numero maggiore (si pensi al plot del polinomo p_n o ad una stima dell'errore d'interpolazione), sarà opportuno disporre di una funzione che consenta di valutare il l'i-esimo polinomio elementare di Lagrange l_i nel vettore $\bar{x}$. Per far questo, tramite il comando `repmat`, possiamo avvalerci della funzione

```
function l = lagrange(i,x,xbar)
%---------------------------
% i=indice del polinomio
% x=nodi d'interpolazione
% xbar= punti di valutazione
%       (vettore colonna!)
%
% l=vettore dell'iesimo pol.
%   di Lagrange su xbar
%---------------------------
n = length(x);
m = length(xbar);

l = prod(repmat(xbar,1,n-1)-repmat(x([1:i-1,i+1:n]),m,1),2)/...
prod(x(i)-x([1:i-1,i+1:n]));
```

Una volta costruito gli $n+1$ vettore colonna **l**, li si assemblano in una matrice L e con il prodotto **p=L*y** si conoscere il valore del polinomio p su tutti i punti target.

3 Punti di Chebyshev e di Chebyshev-Lobatto

I punti di Chebyshev sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev di prima specie, appartengono all'intervallo $[-1,1]$ e sono così definiti:

$$x_i^{(C)} = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, \ldots n\,.$$

Quelli di Chebsyshev-Lobatto includono anche gli estremi dell'intervallo e sono definiti

$$x_i^{(CL)} = \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{(n-1)}\right), \quad i = 1, \ldots n\,.$$

Esercizi proposti

1. Quale dei 2 comandi è preferibile per definire i nodi di Chebyshev-Lobatto?

```
cos([0:n-1]*pi/(n-1))
cos(linspace(0,pi,n))
```

2. Si costruisca il polinomio d'interpolazione in forma di Lagrange della funzione di Runge

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]$$

sia su *punti equispaziati* che su *punti di Chebsyshev* e/o *Chebeyshev-Lobatto*. Fare quindi un programma Matlab che valuti e disegni la funzione $g(x)$ e il polinomio di interpolazione di gradi variabili da $n = 2$ a $n = 15$. Che fenomeno si osserva per $n > 11$?

3. Sempre per la funzione di Runge, si dia una maggiorazione dell'errore d'interpolazione per $n = 3$.