Corso di Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2009/10

Esercitazione di laboratorio

Prof. S. De Marchi - 31 maggio 2010

1. Graficare le principali funzioni radiali di base `Condizionatamente Definite Positive, CDP`:

   - *multiquadriche generalizzate*

     $$\Phi(\mathbf{x}) = (1 + \|\mathbf{x}\|^2)^\beta, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, \; \beta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0$$

     in particolare quella di Hardy, con $\beta = 1/2$ che è CDP di ordine 1 e quella per $\beta = 5/2$ che è CDP di ordine 3.

   - *funzioni potenza*

     $$\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\beta, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, 0 < \beta \notin 2\mathbb{N}$$

   - *thin-plate splines*

     $$\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2\beta} \log \|\mathbf{x}\|, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, \beta \in \mathbb{N}$$

2. Si plottino le funzioni radiali a supporto compatto di Wendland $\varphi_{s,k}, \; k = 0, 1, 2, 3$ sia nel caso unidimensionale che in quello bidimensionale.

   Nota. Si faccia uso del programma `RBFInterpolation2DCSRBF.m` e si lo modifichi opportunamente.

3. Si consideri in $[0, 1]^2$ la funzione di Franke. Interpolarla usando la funzione di Wendland $\varphi_{3,1}(r) = (1 - r)^4_+(4r + 1)$ sulle griglie equispaziate formata da

   $$N = 3^2, 5^2, 9^2, 17^2, 33^2, 65^2, 129^2, 257^2$$

   punti, nei due seguenti casi:

   - *Caso stazionario.* Si sceglie $\epsilon = 0.7$. Quando la fill-distance viene dimezzata, ϵ viene raddoppiato (2ϵ).
   - *Caso non-stazionario.* Il parametro $\epsilon = 0.7$ viene mantenuto fisso mentre varia N.

   Calcolare, in entrambi i casi, gli errori RMS.

   Si verificherà che nel caso non-stazionario le matrici d'interpolazione risulteranno piene e i calcoli si appesantiranno. Pertanto, in questo caso, si suggerisce di fermarsi al caso $N = 65^2 = 4225$ punti.

   Per la soluzione del corrispondente sistema lineare, usare la funzione Matlab `pcg.m` (gradiente pre-condizionato).

4. Ripetere i calcoli usando la funzione a supporto compatto $\varphi(r) = (1 - r)^6_+(3 + 18r + 3r^2 - 192r^3)$.

5. Fare i plot della *power function* in 2D usando il *kernel gaussiano* con $\epsilon = 6$ prendendo $N = 9^2 = 81$ punti equispaziati, di Chebyshev e di Halton. Si noterà come la funzione potenza dipende dalla scelta dei punti. Verificare come varia il massimo della power function, all'aumentare del numero dei punti. Usare il programma `Powerfunction2D.m`.

6. Si determini il parametro ottimale ϵ_{opt} mediante il metodo *trial & error* per le seguenti funzioni

   (a)
   $$f_1(x) = \texttt{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}\,.$$

   (b)
   $$f_2(x) = \frac{3}{4}\left(\mathtt{e}^{-(9x-2)^2/4} + \mathtt{e}^{-(9x+1)^2/49}\right) + \frac{1}{2}\mathtt{e}^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{10}\mathtt{e}^{-(9x-4)^2}\,,$$

   è una *variante della funzione di Franke.*

   (c)
   $$f_3(x) = (1 - |x - 0.5|)^5 \left(1 + 5|x - 0.5| - 27(x - 0.5)^2\right)\,,$$

   che è una funzione RBF $\mathcal{C}^2$ oscillatoria a supporto compatto, detta *funzione di Gneiting* (qui centrata in $(0.5, 0.5)$).

   Si chiede, per ogni funzione f_i, $i = 1, 2, 3$, di produrre una tabella della forma

N	$\|P_{f_i} - f_i\|_\infty$	ϵ_{opt}
3		
5		
9		
17		
33		
65		

   dove, per ogni N, ϵ_{opt} corrisponde al punto di minimo delle curve d'errore in norma infinito, al variare del parametro $\epsilon \in [0, 20]$. Come funzione di base per l'interpolante P_{f_i} si prenda la funzione gaussiana.

Il link dove trovare i files delle funzioni Matlab relative alle RBF è:
`http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010`