Corso di Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2009/10

Esercitazione di laboratorio

Prof. S. De Marchi - 9 giugno 2010

1. Applicare il metodo di *cross-validation* o *Leave-One-Out method* per interpolare

   (a) La funzione modificata di Franke 1-dimensionale

   $$f(x) = \frac{3}{4}\left(\mathtt{e}^{-(9x-2)^2/4} + \mathtt{e}^{-(9x+1)^2/49}\right) + \frac{1}{2}\mathtt{e}^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{10}\mathtt{e}^{-(9x-4)^2},$$

   è una mediante la funzione di Wendland, $\varphi_{3,1}(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$, su punti equispaziati e punti di Chebyshev. Fare il plot delle curve degli errori in modulo al variare di $\epsilon \in [0, 20]$ e $N = 3, \ldots, 65$, come nella tabella precedente.

   (b) Come nel caso precedente, ma per la funzione 2D

   $$f(x, y) = \mathtt{sinc}(x)\mathtt{sinc}(y)$$

   mediante il kernel gaussiano.

   Usare il programma Matlab, `LOOCV2D.m`.

2. Ricordo che l'*approssimante di Shepard* è

   $$\mathcal{P}_f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{x}_i)\frac{w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})}{\sum_{j=1}^{N} w(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s. \tag{1}$$

   Come funzioni peso in $\mathbb{R}^2$, si considerino

   $$w_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = \mathtt{e}^{-\epsilon^2\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|}, \quad \textit{gaussiana, globale}$$

   $$w_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = (1 - \epsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)_+^4(4\epsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| + 1), \quad \textit{Wendland, locale},$$

   e come funzione da approssimare si consideri la *funzione di Franke*, campionata uniformemente su $[0, 1]^2$.

   (a) **Caso non-stazionario**. Usando $\epsilon = 3$, si produca per ognuna delle funzioni peso, una tabella

	stazionario			non-stazionario	
N	RMS-errors	r	N	RMS-error	r
3					
5					
9					
17					
33					
65					

dove N indica il numero di punti equispaziati in ciascuna direzione e r l'ordine di convergenza, che si ottiene dalla formula

$$r_k = \frac{\ln(e_{k-1}/e_k)}{\ln(h_{k-1}/h_k)}, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

con e_k che indica il RMS-error per l'esperimento k-esimo e h_k la fill-distance corrispondente. Facciamo notare, che per punti uniformemente distribuiti il rapporto delle fill-distances è sempre 2. Gli errori RMS si possono calcolare su una griglia di riferimento 40×40 di punti equispaziati su $[0, 1]^2$.

(b) **Caso stazionario**. Partendo da $\epsilon = 3$, lo si moltiplichi di un fattore 2 ad ogni dimezzamento della fill-distance.

Si dovrebbe verificare che il metodo di Shepard, nel caso stazionario, ha un ordine $\mathcal{O}(h)$.

Usare i programmi `Shepard2D.m` e `Shepard_CS.m` per fare i calcoli richiesti.

Il link dove trovare i files delle funzioni Matlab relative alle RBF è:

`http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010`