Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2011/12

Esercitazione di laboratorio del 12 marzo 2012

Prof. Stefano De Marchi

1 Generalità sulle funzioni a base radiale

Per introdurre le `funzioni a base radiale`, in inglese radial basis functions o `RBF`, conviene iniziare dal caso 1-dimensionale e dall'interpolazione lineare a tratti. Dati sull'intervallo $[a, b]$, gli n punti distinti $x_1, \ldots, x_n$, i valori f_i e la funzione $\phi(x) = |x|$, consideriamo le n traslate $\phi_i(x) := \phi(x - x_i),\ i = 1, \ldots, n$.

Domanda. Combinando le traslate $\phi_i(\cdot)$, $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i(x)$, siamo in grado di determinare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ cosicchè $s(x_i) = f(x_i)\ \ i = 1, \ldots, n$?

La risposta equivale a chiedersi se il seguente sistema lineare ha soluzione

$$\begin{pmatrix} |x_1 - x_1| & |x_1 - x_2| & \ldots & |x_1 - x_n| \\ |x_2 - x_1| & |x_2 - x_2| & \ldots & |x_2 - x_n| \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ |x_n - x_1| & |x_n - x_2| & \ldots & |x_n - x_n| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} .$$

Se $A, \lambda, \mathbf{f}$ sono la matrice (simmetrica), il vettore incognito e il vettore dei valori, la soluzione sarà unica se $\mathtt{det}(A) \neq 0$ in tal caso avremo determinato l'interpolante lineare a tratti.

Potremo anche prendere la funzione $\phi(x) = |x|^3$, ottenendo una soluzione simile a quella che si otterrebbe con `splines cubiche`. Ma a differenza del problema d'interpolazione con splines cubiche, che origina un sistema tridiagonale, in questo caso la matrice simmetrica risulterà piena.

In dimensione d, sostituiremo $|\cdot|$ con la norma euclidea $\|\cdot\|_2$ (che ci garantisce, come vedremo, la simmetria e la radialità). Pertanto la forma dell'interpolante diventa

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2) .$$

1.1 Alcuni tipi di RBF

Indichiamo con $r = \|x - x_i\|$.

- **Con regolarità finita**
  1. `Monomiali (MN)`: $\phi(r) = r^{2m+1}$.
  2. `Thin Plate Splines (TPS)`: $\phi(r) = r^{2m} \log r$.
  3. `Wendland (W2):` $\phi(r) = (1 - r)_+^4 (1 + 4r)$ (è $\mathcal{C}^2$).

- **Con regolarità infinita**

  1. `Multiquadriche (MQ)`: $\phi(r) = \sqrt{1 + (\epsilon r)^2}$.
  2. `Multiquadriche inverse (IMQ)`: $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1+(\epsilon r)^2}}$.
  3. `Quadriche inverse (IQ)`: $\phi(r) = \frac{1}{1+(\epsilon r)^2}$.
  4. `Gaussiane (G)`: $\phi(r) = \mathtt{e}^{-\epsilon r^2}$.
  5. `Secante iperbolica (SH)`: $\phi(r) = \mathtt{sech}(\epsilon r)$, dove $\mathtt{sech}(x) = 1/\mathtt{cosh}(x) = 2/(e^x + e^{-x})$.

Il parametro ϵ prende il nome di *parametro di forma*. Per $\epsilon \to 0$ le funzioni di base si appiattiscono molto mentre per ϵ grande diventano sempre più compatte, e anzi in x_i hanno un picco.

2 Esercitazione proposta

1. Fare il grafico di alcune RBF sia nel caso 1d che 2d. Fate variare il parametro di forma per verificare che per $\epsilon \to 0$ le funzioni si appiattiscono mentre per $\epsilon \to \infty$ sono sempre più localizzate.

2. Dato un insieme $X = (x_i, f_i),\ i = 1, \ldots, 10$ di 10 coppie di valori in $\mathbb{R}^2$, con $f_i = \sin(x_i^2/2),\ x_i \in [0, \pi]$, costruire l'interpolante RBF usando una funzione RBF con regolarità finita e una con regolarità infinita. Confrontare i risultati con l'interpolazione polinomiale.

3. Si consideri la *funzione di Franke*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= .75\exp[-((9x_1-2)^2 + (9x_2-2)^2)/4] + .75\exp[-(9x_1+1)^2/49 - (9x_2+1)/10] \\ &+ .5\exp[-((9x_1-7)^2 + (9x_2-3)^2)/4] - .2\exp[-(9x_1-4)^2 - (9x_2-7)^2]; \end{aligned}$$

   in $\Omega = [0,1]^2$. Costruire l'interpolante con RBF Gaussiane e TPS su una griglia $N = 20 \times 20$ di punti di Chebyshev. Valuare anche l'errore RMSE (Root Mean Square Error): $\|I_N(f) - f\|/\sqrt{N}$.

`Tempo assegnato:` 2 ore.

3 Approffondimenti

1. Come link davvero interessante sull'argomento, citiamo

   `http://www.farfieldtechnology.com/products/toolbox/theory/index.html`,

   dove vengono descritte cosa sono le funzioni a base radiale e loro applicazioni alla modellizzazione di superfici e di problemi di interpolazione di "scattered data".

2. Armin Iske: *Multiresolution Methods in Scattered Data Modelling*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering Vol. 37, Springer (2004). Ottimo libro e utile strumento per implementazioni di *scattered data problems* e applicazioni *meshfree*.

3. Greg Fasshauer: *Meshfree Approximation Methods with Matlab* Interdisciplinary Mathematical Sciences - Vol. 6 World Scientific Publishers, Singapore, 2007

   La recensione del libro

   Meshfree approximation methods are a relatively new area of research, and there are only a few books covering it at present. Whereas other works focus almost entirely on theoretical aspects or applications in the engineering field, this book provides the salient theoretical result needed for a basic understanding of meshfree approximation methods. The emphasis here is on a hands-on approach that includes Matlab routines for all basic operations. Meshfree approximation methods, such as radial basis function and moving least squares method, are discussed from a scattered data approximation and partial differential equations point of view. A good balance is supplied between the necessary theory and implementation in terms of many Matlab programs, with examples and applications to illustrate key points. Used as class notes for graduate courses at Northwestern University, Illinois Institute of Technology, and Vanderbilt University, this book will appeal to both mathematics and engineering graduate students.