# Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2011/12

Esercitazione di laboratorio del 14 maggio 2012

*Prof. Stefano De Marchi*

1. Facciamo alcuni esperimenti univariati con la tecnica MLS (*moving least squares*) con RBF a supporto globale, quali le gaussiane di Laguerre. Lo scopo dell'esercizio è comprendere l'effetto dello *scaling* sulla convergenza dei MLS. La funzione che si considera è una funzione di Franke *mollificata* come segue

$$f(x) = \left(15\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-(2x-1)^2}}\right)\left[\frac{3}{4}\left(\mathrm{e}^{-(9x-2)^2/4} + \mathrm{e}^{-(9x+1)^2/49}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-(9x-4)^2}\right].$$

   Sia $D$ il parametro di scalatura, dell'intervallo $[0,1]$, e $D \in \{0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0\}$. Si prenda una griglia con $N = 2^k+1$, $k = 1, \ldots, 14$ punti equispaziati di $[0,1]$. L'approssimante è

$$P_f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi D}} \sum_{k=1}^{N} f(x_i)\mathrm{e}^{\frac{{x-x_i}^2}{Dh^2}}, \quad x \in [0,1]$$

   e $h = 1/(N-1)$. Questo corrisponde a un parametro di forma $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{D}h} = \frac{N-1}{\sqrt{D}} = \frac{2^k}{\sqrt{D}}$$

   ovvero siamo nel caso di un'approssimazione *stazionaria*.

   Usare la funzione `ApproxMLSApprox1D.m` che consente di ottenere dei plots su Gaussiane di Laguerre, per vari valori di $D$.

   Si noterà che se $D \geq 2$ l'ordine di approssimazione è $\mathcal{O}(h^2)$, mentre per valori minori si osserverà una saturazione e quindi uno stallo dell'errore.

   Usando poi gaussiane di Laguerre di ordini $p = 0, 1, 2$ (ricordo che nel caso unidimensionale tali funzioni sono $\Phi(x) = e^{-x^2} L_n^{p/2}(x^2)$, dove $L_n^{p/2}$ sono polinomi di Laguerre di grado $n$ e ordine $p/2$) e valori di $D = 2, 4, 6$ si otterranno ordini che sono $h^2, h^4$ e $h^6$ rispettivamente (come previsto dalla teoria vista).

2. Questo secondo esercizio ha lo scopo di comprendere l'effetto di un cambio di base sul numero di condizionamento della matrice d'interpolazione Si chiede di calcolare $\kappa_2$ (il numero di condizionamento in norma 2) usando i 3 approcci (visti a lezione il 10 maggio scorso), nel caso di *thin plate splines* con punti e centri nel quadrato unitario $[0,1]^2$:

   (i) la base standard che consiste delle funzioni $\Phi(\cdot, x_j)$, $j = 1, \ldots, N$ e monomi (vedi funzione `RBFInterpolation2Dlinear.m`)

   (ii) i reproducing kernels $K(\cdot, x_j)$ (funzione `tpsK.m`)

   (iii) usando la matrice $C$ con $C_{i,j} = s(x_i, x_j)$, $i, j = M+1, \ldots, N$ (funzione `tpsH.m`)

Si osservi che le funzioni Matlab indicate, producono sia la matrice d'interpolazione che la matrice di valutazione. Pertanto, per costruire e visualizzare l'interpolante basterà considerare `RBFInterpolation2D.m` e cambiare le linee 13 e 14 come segue.

Ad esempio, nel caso si usi `tpsK.m`, le linee si modificano come segue

```
IM=tpsK(dsites,ctrs)
```

```
EM=tpsK(epoints,ctrs)
```

Si chiede di fare degli esperimenti in cui il numero dei data-sites varia cosicché le loro *separation-distances* variano assumano valori 1/8, 1/16, 1/32, 1/64.

Produrre una tabella del tipo

| spaziatura | approccio standard | reproducing kernel | con matrice C |
|---|---|---|---|
| | | | |

3. Ripetere l'esperimento di prima, questa volta tenendo fisso il numero di data-sites, prendendo $5 \times 5$ punti equispaziati. Invece si scala il dominio considerando il quadrato $[0, a]^2$, con $a$ parametro di scalatura. Si noterà che $q_X$ cambia e che l'effetto di tale procedemento non influenza di molto i numeri di condizionamento nei primi 2 approcci, mentre l'approccio con matrice $C$ risulterà completamente insensibile alla riscalatura (come visto a lezione).

   Produrre anche qui una tabella

| parametro $a$ | approccio standard | reproducing kernel | con matrice C |
|---|---|---|---|
| | | | |

Ricordo che il link dove trovare i files delle funzioni Matlab è:
`http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010`