

# Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2011/12

ESERCITAZIONE DI LABORATORIO DEL 16 APRILE 2012

Prof. Stefano De Marchi

## 1 Esercitazione proposta

1. Graficare le principali funzioni radiali di base *Condizionatamente Definite Positive, CDP*:

- *multiquadrliche generalizzate*

$$\Phi(\mathbf{x}) = (1 + \|\mathbf{x}\|^2)^\beta, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$$

in particolare quella di Hardy, con  $\beta = 1/2$  che è strettamente CDP di ordine 1 e quella per  $\beta = 5/2$  che è strettamente CDP di ordine 3.

- *funzioni potenza*

$$\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\beta, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, 0 < \beta \notin 2\mathbb{N}$$

Ad esempio prendere  $\beta = 3$  (che è strettamente CDP di ordine 2) e  $\beta = 5$  (che è strettamente CDP di ordine 3).

Verificare che sono *shape parameter free*.

- *thin-plate splines*

$$\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2\beta} \log \|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, \beta \in \mathbb{N}$$

Quella classica si ottiene con  $\beta = 1$  (che è strettamente CDP di ordine 2), mentre con  $\beta = 2$  si ottiene quella di ordine 3. Verificare che anche queste sono *shape parameter free*.

2. Si plottino le funzioni radiali a supporto compatto di **Wendland**  $\varphi_{3,k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  sia nel caso unidimensionale che in quello bidimensionale

$k$	$\varphi_{3,k}$
0	$(1-r)_+^2$
1	$(1-r)_+^4(4r+1)$
2	$(1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$
3	$(1-r)_+^8(32r^3+25r^2+8r+1)$

3. Si consideri in  $[0, 1]^2$  la funzione di Franke. Interpolare usando la funzione di Wendland  $\varphi_{3,1}(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$  sulle griglie equispaziate formata da

$$N = 3^2, 5^2, 9^2, 17^2, 33^2, 65^2, 129^2, 257^2$$

punti, nei due seguenti casi:

- *Caso stazionario*. Si sceglie  $\epsilon = 0.7$ . Quando la fill-distance viene dimezzata,  $\epsilon$  viene raddoppiato ( $2\epsilon$ ).

- *Caso non-stazionario.* Il parametro  $\epsilon = 0.7$  viene mantenuto fisso mentre varia  $N$ .

Calcolare, in entrambi i casi, gli errori RMS.

Si verificherà che nel caso non-stazionario le matrici d'interpolazione risulteranno piene e i calcoli si appesantiranno. Pertanto, in questo caso, si suggerisce di fermarsi al caso  $N = 65^2 = 4225$  punti.

Per la soluzione del corrispondente sistema lineare sparso, usare la funzione Matlab `pcg.m` (gradiente pre-condizionato).

**Nota.** Si faccia uso del programma `RBFInterpolation2DCSRBF.m` e lo si modifichi opportunamente. Questa funzione utilizza `kd_rangequery3.m` e `DistanceMatrixCSRBF_new.m`.

4. Ripetere i calcoli usando la funzione a supporto compatto  $\varphi(r) = (1 - r)_+^6(3 + 18r + 3r^2 - 192r^3)$ .
5. Fare i plot della *power function* in 2D usando il *kernel gaussiano* con  $\epsilon = 6$  prendendo  $N = 9^2 = 81$  punti equispaziati, di Chebyshev e di Halton. Si noterà come la funzione potenza dipende dalla scelta dei punti. Verificare come varia il massimo della power function, all'aumentare del numero dei punti. Usare il programma `Powerfunction2D.m`.

Ricordo che il link dove trovare i files delle funzioni Matlab è:

<http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010>