Prima prova del corso di TAA, AA 2011/12

Università di Padova

Prof. Stefano De Marchi

`Padova, 4 giugno 2012`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio il cognome, nome. I fogli su cui scrivere saranno forniti dal docente.

1. Cos'è una sequenza a *bassa discrepanza*? Si fornisca un esempio.
2. Si enunci il teorema di caratterizzazione di Bochner per funzioni definite positive e si fornisca la dimostrazione dell'implicazione "$\Phi(\mathbf{x}) = \hat{\mu}(\mathbf{x})$, con μ misura finita di Borel, allora Φ è definita positiva."
3. Si faccia vedere che la funzione gaussiana $\phi_\epsilon(r) = e^{-(\epsilon r)^2},\ r \in [0, \infty),\ \epsilon > 0$ è strettamente definita positiva per ogni $\epsilon > 0$. Per quale valore di ϵ essa coincide con la sua trasformata di Fourier?
4. Si fornisca un esempio di una funzione radiale CDP di ordine 1. In particolare, si faccia vedere che se Φ è CDP di ordine 1 e $\Phi(0) \le 0$ allora la matrice d'interpolazione è non singolare per ogni scelta di punti N distinti $x_1, \ldots, x_N$ di $\mathbb{R}^s$.
5. In che senso la *power function* $P_{\Phi,X}$ dipende dal kernel Φ e dall'insieme dei punti X? Si fornisca una delle espressioni viste. Inoltre si dimostri la stima puntuale dell'errore d'interpolazione
$$|f(x) - P_f(x)| \le P_{\Phi,X}(x) \|f\|_{\mathcal{N}_\Phi}$$
dove $\mathcal{N}_\Phi$ indica lo spazio nativo.
6. Si dimostri uno dei risultati di ottimalità delle interpolazioni RBF nel caso di kernels strettamente DP, ovvero che
$$\|P_f\|_{\mathcal{N}_\Phi} = \min_{\substack{g \in \mathcal{N}_\Phi \\ g(x_i) = f(x_i),\ i = 1:N}} \|g\|_{\mathcal{N}_\Phi}$$
dove x_i sono punti distinti d'interpolazione e P_f è l'interpolante di f su punti x_i.

◊◊

Tempo massimo: 2 ore.