Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2012/13

Esercitazione di laboratorio del 18 aprile 2013

Prof. Stefano De Marchi

1 Esercitazione proposta

1. Graficare le principali funzioni radiali di base *Condizionatamente Definite Positive, CDP*:

   - *multiquadriche generalizzate*

     $$\Phi(\mathbf{x}) = (1 + \|\mathbf{x}\|^2)^\beta, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, \; \beta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0$$

     in particolare quella di Hardy, con $\beta = 1/2$ che è strettamente CDP di ordine 1 e quella per $\beta = 5/2$ che è strettamente CDP di ordine 3.

   - *funzioni potenza*

     $$\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\beta, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, 0 < \beta \notin 2\mathbb{N}$$

     Ad esempio prendere $\beta = 3$ (che è strettamente CDP di ordine 2) e $\beta = 5$ (che è strettamente CDP di ordine 3).
     Verificare che sono *shape parameter free*.

   - *thin-plate splines*

     $$\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2\beta} \log \|\mathbf{x}\|, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, \beta \in \mathbb{N}$$

     Quella classica si ottiene con $\beta = 1$ (che è strettamente CDP di ordine 2), mentre con $\beta = 2$ si ottiene quella di ordine 3. Verificare che anche queste sono *shape parameter free.*

2. Si plottino le funzioni radiali a supporto compatto di **Wendland** $\varphi_{3,k}, \; k = 0, 1, 2, 3$ sia nel caso unidimensionale che in quello bidimensionale

k	$\varphi_{3,k}$
0	$(1-r)_+^2$
1	$(1-r)_+^4(4r+1)$
2	$(1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$
3	$(1-r)_+^8(32r^3+25r^2+8r+1)$

3. Si consideri in $[0, 1]^2$ la funzione di Franke. Interpolarla usando la funzione di Wendland $\varphi_{3,1}(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$ sulle griglie equispaziate formate da

   $$N = 3^2, 5^2, 9^2, 17^2, 33^2, 65^2$$

   punti, nei due seguenti casi:

   - *Caso stazionario.* Si sceglie $\epsilon = 0.7$. Passando via via a griglie più fini, ϵ viene poi raddoppiato (2ϵ) (che equivale a una fill-distance dimezzata).

- *Caso non-stazionario.* Il parametro $\epsilon = 0.7$ viene mantenuto fisso mentre varia N.

Calcolare, in entrambi i casi, gli errori RMS.

Si verificherà che nel caso non-stazionario le matrici d'interpolazione risulteranno piene e i calcoli si appesantiscono. Per questo si è preso come massimo valore $N = 65^2 = 4225$ punti.

Per la soluzione del corrispondente sistema lineare sparso, usare la funzione Matlab `pcg.m` (gradiente pre-condizionato).

Nota. Si usi il programma `RBFInterpolation2DCSRBF.m` e lo si modifichi opportunamente. Questa funzione utilizza `kd_rangequery3.m` e `DistanceMatrixCSRBF_new.m`.

4. Ripetere i calcoli usando la funzione a supporto compatto $\varphi(r) = (1-r)_+^6(3+18r+3r^2-192r^3)$.

5. Fare i plot della *power function* in 2D usando il *kernel gaussiano* con $\epsilon = 6$ prendendo $N = 9^2 = 81$ punti equispaziati, di Chebyshev e di Halton. Si noterà come la funzione potenza dipende dalla scelta dei punti. Verificare come varia il massimo della power function, all'aumentare del numero dei punti. Usare il programma `Powerfunction2D.m`.

Ricordo che il link dove trovare i files delle funzioni Matlab è:
`http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010`