

Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni, A.A. 2012/13

ESERCITAZIONE DI LABORATORIO DEL 2 MAGGIO 2013

Prof. Stefano De Marchi

1 Esercitazione proposta

1. Si determini il parametro ottimale ϵ_{opt} mediante il metodo *trial & error* per le seguenti funzioni univariate:

(a)

$$f_1(x) = \text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

(b)

$$f_2(x) = \frac{3}{4} \left(e^{-(9x-2)^2/4} + e^{-(9x+1)^2/49} \right) + \frac{1}{2} e^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{10} e^{-(9x-4)^2},$$

è una *variante della funzione di Franke*.

(c)

$$f_3(x) = (1 - |x - 0.5|)^5 (1 + 5|x - 0.5| - 27(x - 0.5)^2),$$

che è una funzione RBF \mathcal{C}^2 oscillatoria a supporto compatto, detta *funzione di Gneiting* (qui centrata in $(0.5, 0.5)$).

Si chiede, per ogni funzione f_i , $i = 1, 2, 3$, di produrre una tabella della forma

N	$\ P_{f_i} - f_i\ _\infty$	ϵ_{opt}
3		
5		
9		
17		
33		
65		

dove, per ogni N , ϵ_{opt} corrisponde al punto di minimo delle curve d'errore in norma infinito, al variare del parametro $\epsilon \in [0, 20]$. Come funzione di base per l'interpolante P_{f_i} si prenda la funzione gaussiana.

2. Fare il plot della sup-norm della *power function*, $\|P_{\Phi, X}\|_\infty$, usando la formula

$$P_{\Phi, X}(x) = \sqrt{\Phi(x, x) - (b(x))^t A^{-1} b(x)}$$

con A matrice d'interpolazione e $b(x) = [\Phi(\cdot, x_1), \dots, \Phi(\cdot, x_N)]^t$, al variare del parametro di forma $\epsilon \in [0, 20]$, usando il kernel gaussiano in 2D, per valori di $N = 9, 25, 81, 289$. Prendere punti equispaziati sia come centri che come punti di valutazione della power function.

Produrre una tabella, simile a quella dell'esercizio precedente, con l'aggiunta di una colonna in cui si riporta il numero di condizionamento della matrice A , corrispondente al valore ottimale del parametro di forma. Usare la funzione `Powerfunction2D.m` per il calcolo della power function.

3. Applicare il metodo di *cross-validation* o *Leave-One-Out method* per interpolare

(a) La funzione modificata di Franke 1-dimensionale

$$f(x) = \frac{3}{4} \left(e^{-(9x-2)^2/4} + e^{-(9x+1)^2/49} \right) + \frac{1}{2} e^{-(9x-7)^2/4} - \frac{1}{10} e^{-(9x-4)^2},$$

usando la funzione di Wendland, $\varphi_{3,1}(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$, su punti equispaziati e punti di Chebyshev. Fare il plot delle curve degli errori in modulo al variare di $\epsilon \in [0, 20]$ e $N = 3, \dots, 65$, come nella tabella dell'esercizio 1.

(b) Come nel caso precedente, ma per la funzione 2D

$$f(x, y) = \text{sinc}(x)\text{sinc}(y)$$

mediante l'uso del kernel gaussiano.

Lo script Matlab, `L00CV2D.m`, implementa il `Leave One Out Cross Validation method`, in 2D.

Ricordo che il link dove trovare i files delle funzioni Matlab è:
<http://www.math.unipd.it/~demarchi/TAA2010>